

Un corrigé du concours Mines Math-II- 2014 Filière MP

Proposé par Mrs : HAMANI Ahmed

A-Théorème du point fixe**1. Unicité du point fixe**

Supposons que f admet deux points fixes $x, y \in A$ distincts, alors $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$, donc $1 \leq k$, ce qui contredit $k \in [0, 1[$.

2. $(x_n)_n$ est de Cauchy

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$, donc par récurrence $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$.

$$\begin{aligned} \text{— } \forall n, p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| &= \left\| \sum_{j=n}^{n+p-1} (x_{j+1} - x_j) \right\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \|x_{j+1} - x_j\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j \|x_1 - x_0\| = \\ &= k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\|, \text{ ce qui entraîne que } \sup_{p \in \mathbb{N}} \|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

3. Conclusion

La suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans A qui est complet comme fermé dans un complet, donc $(x_n)_n$ est convergente vers un certain $x \in A$, donc par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$ et grâce à la continuité de f , on obtient $x = f(x)$.

B-Invariance par homotopie**4. T n'est pas vide**

f admet un point fixe, donc $\exists x \in A$, tel que $x = f(x) = h(x, 0)$, donc $0 \in T$.

5. Existence de $(x_n)_n$ et majoration de $\|x_n - x_m\|$

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T$, donc par définition de T , $\exists x_n \in A$ tel que $x_n = h(x_n, t_n)$, ce qui assure l'existence de $(x_n)_n$.

— Les inégalités **a** et **b** entraînent que

$$\begin{aligned} \forall n \geq m \in \mathbb{N}, \|x_n - x_m\| &= \|h(x_n, t_n) - h(x_m, t_m)\| = \\ &= \|h(x_n, t_n) - h(x_m, t_n) + h(x_m, t_n) - h(x_m, t_m)\| \leq \|h(x_n, t_n) - h(x_m, t_n)\| + \|h(x_m, t_n) - h(x_m, t_m)\| \\ &\leq k\|x_n - x_m\| + k'|t_n - t_m|, \text{ donc } (1 - k)\|x_n - x_m\| \leq k'|t_n - t_m|, \text{ ce qui assure l'inégalité} \\ \|x_n - x_m\| &\leq \frac{k'}{1 - k}|t_n - t_m|. \end{aligned}$$

6. $(x_n)_n$ de Cauchy et T est fermé

— $(t_n)_n$ étant convergente, donc de Cauchy, ce qui assure par l'inégalité précédente que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans A qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers un certain $x \in A$.

$$\begin{aligned} \text{— } \forall x, y \in A, \forall t, u \in [0, 1], \|h(x, t) - h(y, u)\| &\leq \|h(x, t) - h(y, t)\| + \|h(y, t) - h(y, u)\| \leq \\ &\leq k\|x - y\| + k'|t - u|, \text{ donc l'application } h \text{ est continue sur } A \times [0, 1]. \end{aligned}$$

La continuité de h sur $A \times [0, 1]$ permet d'avoir par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité $x_n = h(x_n, t_n)$, $x = h(x, t)$, c'est à dire que $t \in T$, ce qui entraîne que T est fermée.

7. La distance de x à ∂A est strictement positive

Supposons que $d(x, \partial A) = 0$, alors la caractérisation séquentielle assure l'existence d'une suite $(x_n)_n$ de ∂A convergente vers x , or ∂A est fermée, donc $x \in \partial A$, et la condition **c** montre que $x \neq h(x, t)$, ce qui contredit l'hypothèse $x = h(x, t)$.

8. D'une égalité déjà établie dans 6, on aura $\|x - h(y, u)\| = \|h(x, t) - h(y, u)\| \leq k\|x - y\| + k'|t - u|$ et des inégalités données par hypothèse, on obtient $\|x - h(y, u)\| \leq kr + k'\varepsilon \leq kr + (1 - k)r = r$.

9. L'application $y \mapsto h(y, u)$ admet un point fixe intérieur à A

D'après la question 8, $\forall y \in \overline{B}(x, r) \cap A$, $h(y, u) \in \overline{B}(x, r) \cap A$, donc d'après **b**, l'application

$$h(\cdot, u) : \overline{B}(x, r) \cap A \longrightarrow \overline{B}(x, r) \cap A \text{ est contractante, donc d'après le théorème de Picard, elle}$$

$$y \longmapsto h(y, u)$$

admet un point fixe $y \in \overline{B}(x, r) \cap A$, c'est à dire $h(y, u) = y$ égalité qui exige d'après **c**, que $y \notin \partial A$, donc y est intérieur à A .

10. T est un ouvert relatif

Soit $t \in T$, on choisit ε et r comme précédemment, alors d'après 9, $\forall u \in B(t, \varepsilon) \cap [0, 1]$, l'application $h(\cdot, u)$ admet un point fixe $y \in \overset{\circ}{A}$, donc $h(y, u) = y$, ce qui assure que $u \in T$, c'est à dire $B(t, \varepsilon) \cap [0, 1] \subset T$

et par suite T est un ouvert relatif à $[0, 1]$.

Existence et unicité d'un point fixe de g intérieure à A

T étant non vide majoré par 1, soit $s = \sup(T)$ et supposons que $s < 1$, alors la fermeture de T entraîne que $s \in T$, et puisque T est un ouvert relatif de $[0, 1]$, il existe $s' \in]s, 1[$ tel que $[s, s'] \subset T$, ce qui contredit la définition de s , donc $s = 1 \in T$, d'où l'existence de $x \in A$ tel que $x = h(x, 1)$, c'est à dire $x = g(x)$.

L'hypothèse $\boxed{c}$ montre que $x \notin \partial A$, donc x est intérieur à A .

11. Existence et unicité d'un point fixe de f intérieure à A

On considère l'application $h : A \times [0, 1] \longrightarrow E$, alors l'application h vérifie

$$(x, t) \longmapsto tf(x)$$

$\forall x \in A$, $h(x, 1) = f(x)$ et $h(x, 0) = 0$ et les trois propriétés $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ et $\boxed{c}$.

$\boxed{a}$: f étant contractante, soit $k \in [0, 1[$ le rapport de contraction, alors

$\forall x, y \in A$, $\forall t \in [0, 1]$, $\|h(x, t) - h(y, t)\| = |t| \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$.

$\boxed{b}$: $f(A)$ étant bornée, soit $k' > 0$ un majorant, alors

$\forall x \in A$, $\forall t, u \in [0, 1]$, $\|h(x, t) - h(x, u)\| = |t - u| \|f(x)\| \leq k' |t - u|$.

$\boxed{c}$: $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \in \partial A$, $h(x, t) = tf(x) \neq x$.

On a donc f et l'application nulle sont contractantes et homotopes, de plus l'application nulle admet $0 \in \overset{\circ}{A}$ comme point fixe, donc d'après la question 10, f possède un unique point fixe intérieur à A .

C-Étude de certains opérateurs à noyau

12. F est contractante

$\forall t \in [a, b]$, $\forall y, z \in C([a, b])$, $y(t) \in D$ et $z(t) \in D$, donc

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F(z)(t)| &= \left| \int_a^b K(t, x) (f(x, y(x)) - f(x, z(x))) dx \right| \leq \int_a^b |K(t, x)| |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| dx \leq \\ &\leq K_0 \int_a^b |K(t, x)| |y(x) - z(x)| dx \leq K_0 \|y - z\| \int_a^b |K(t, x)| dx \leq \alpha K_0 \|y - z\|. \end{aligned}$$

13. F admet un point fixe unique intérieure à A

L'inégalité précédente et l'hypothèse $\alpha K_0 \in [0, 1[$ entraîne que $F : A \longrightarrow C([a, b])$ est contractante sur A qui est fermée. de plus F vérifie les hypothèses $\boxed{d}$, $\boxed{e}$ et $\boxed{f}$ de la question 11.

$\boxed{d}$: Par hypothèse, la fonction nulle est intérieure à A .

$\boxed{e}$: A étant bornée, soit $M > 0$ un majorant, alors $\forall \varphi \in A$, $\|F(\varphi)\| \leq \|F(\varphi) - F(0)\| + \|F(0)\| \leq \alpha K_0 \|\varphi\| + \|F(0)\| \leq M + \|F(0)\|$, donc $F(A)$ est bornée.

$\boxed{f}$: Par hypothèse $\forall \varphi \in \partial A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$.

On conclut par la question 11, que F admet un unique point fixe intérieur à A .

D-Une généralisation

14. $0 \in X$, donc X est non vide.

X est fermé

Soit $(x_n)_n$ une suite de X convergente vers $x \in A$, alors $\exists (t_n)_n$ suite de $[0, 1]$ tel que $x_n = t_n f(x_n)$.

$[0, 1]$ étant compact, donc il existe une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_n$ de $[0, 1]$ convergente vers $t \in [0, 1]$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)})$, le passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$ en considérant la continuité de f , entraîne que $x = tf(x)$, donc $x \in X$, ce qui assure que X est un fermé.

Définition et continuité de μ

- Si $\exists x \in A$ tel que $d(x, \partial A) + d(x, X) = 0$, alors $d(x, \partial A) = d(x, X) = 0$, donc $x \in \overline{\partial A} \cap \overline{X} = \partial A \cap X$, or l'hypothèse $\boxed{i}$ montre que $\partial A \cap X = \emptyset$, donc μ est bien définie sur A .

- Les applications $x \longmapsto d(x, \partial A)$ et $x \longmapsto d(x, X)$ sont continues comme des applications 1-lipchitziennes, donc μ est continue sur A .

- Si $x \in X$, alors $d(x, X) = 0$, donc $\mu(x) = 1$.

- Si $x \in \partial A$, alors $d(x, \partial A) = 0$, donc $\mu(x) = 0$.

15. Continuité de g

La fonction g est continue sur A comme produit de fonctions continues, et sur $C \setminus A$ comme fonction nulle.

Reste la continuité sur ∂A . Soit $x_0 \in \partial A$, alors

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x \in A}} g(x) = \mu(x_0) f(x_0) = 0 = \lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ x \in C \setminus \partial A}} g(x).$$

On conclut que g est continue sur C .

Compacité de $\overline{g(C)}$

$g(C) = g(A \cup (C \setminus A)) \subset g(A) \cup g(C \setminus A) = g(A) \subset [0, 1] \cdot f(A)$, donc $\overline{g(C)} \subset [0, 1] \cdot \overline{f(A)}$, or $[0, 1] \cdot \overline{f(A)}$ est un compact comme image du compact $[0, 1] \times \overline{f(A)}$ par l'application continue $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, ce qui entraîne que $\overline{g(C)}$ est un fermé dans un compact, donc c'est un compact.

16. **f admet un point fixe intérieure à A**

- C est une partie convexe fermée et la question précédente montre que $g : C \rightarrow C$ est continue telle que $\overline{g(C)}$ est compact, donc le théorème de Schauder affirme que g admet un point fixe $x \in C$.

- Si $x \notin X$, alors par définition de X , et puisque $\mu(x) \in [0, 1]$, $\mu(x)f(x) \neq x$, donc $x \notin A$, ce qui exige que $x \in C \setminus A$, et par suite $x = g(x) = 0 \in X$, ce qui contredit $x \notin X$.

- On conclut donc que $x \in X \subset A$, et par suite $\mu(x) = 1$, donc $x = g(x) = \mu(x)f(x) = f(x)$.

E-Application aux intégrales de Fredholm

17. **La constante c_φ satisfaisant aux inégalités**

Soit $\varphi \in E$. Les fonctions $h, K_t, x \mapsto g(x, \varphi(x))$ et $t \mapsto \|K_t\|_2$ sont continues sur $[0, 1]$, donc avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\forall t, u \in [0, 1]$

$$|F(\varphi)(t)| \leq \|h\|_0 + \left(\int_0^1 |K_t(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(x, \varphi(x))|^2 dx \right)^{1/2} = \|h\|_0 + c_\varphi \|K_t\|_2 \leq \\ \leq \|h\|_0 + c_\varphi \sup_{s \in [0, 1]} \|K_s\|_2. \text{ où } c_\varphi = \left(\int_0^1 |g(x, \varphi(x))|^2 dx \right)^{1/2} \text{ est indépendante de } t \text{ et } u.$$

Toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leq |h(t) - h(u)| + \int_0^1 |g(x, \varphi(x))| (|K(t, x) - K(u, x)|) dx \leq \\ \leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2.$$

18. **F est une application de E vers E**

Soit $t, u \in [0, 1]$, les fonctions $h, t \mapsto K_t$ et $\|\cdot\|_2$ sont continues, donc par passage à la limite $t \rightarrow u$ dans l'inégalité $|F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2$, on obtient $F(\varphi)(t) \xrightarrow[t \rightarrow u]{} F(\varphi)(u)$, ce qui assure la continuité de $F(\varphi)$ et F est donc une application de E vers E .

19. **La convergence uniforme de $(\varphi_n)_n$ entraîne la convergence simple de $(F(\varphi_n))_n$**

Soit $t \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$.

La convergence de φ_n vers φ est uniforme, donc simple et par suite $\forall x \in [0, 1], \varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi(x)$ et la continuité de g sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ entraîne que $g(x, \varphi_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x, \varphi(x))$, c'est à dire $\exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |g(x, \varphi_n(x)) - g(x, \varphi(x))| \leq \varepsilon$, et par suite :

$$|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi)(t)| = \left| \int_0^1 K(t, x) |g(x, \varphi_n(x)) - g(x, \varphi(x))| dx \right| \leq \varepsilon \int_0^1 |K(t, x)| dx, \text{ ce qui assure que}$$

$F(\varphi_n)$ converge simplement vers $F(\varphi)$ sur $[0, 1]$.

20. Soit $\varepsilon > 0$.

- D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi_n\|_0 \leq M$, donc $\forall x \in [0, 1], |\varphi_n(x)| \leq M$ et l'hypothèse $\boxed{j}$ entraîne l'existence de $\mu_M \in L^2$ tel que $|g(x, \varphi_n(x))| \leq \mu_M(x)$ et par suite $c_{\varphi_n} \leq \|\mu_M\|_2 \leq 1 + \|\mu_M\|_2$.

- D'autre part, les fonctions h et $t \mapsto K_t$ sont continues sur le compact $[0, 1]$, donc d'après le théorème de Heine, elles y sont uniformément continues, d'où l'existence de $\delta > 0$ tel que $\forall t, u \in [0, 1]$, on a $|t - u| < \delta$ implique $|h(t) - h(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|K_t - K_u\|_2 < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|\mu_M\|_2)}$.

On conclusion, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, t, u \in [0, 1]$, on a l'implication $|t - u| < \delta \implies |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| \leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2 \leq |h(t) - h(u)| + (1 + \|\mu_M\|_2) \|K_t - K_u\|_2 \leq \varepsilon$.

21. **Continuité de F**

Notons g la limite simple de la suite $(F(\varphi_n))_n$ sur $[0, 1]$ et soit $\varepsilon > 0$, alors le résultat de la question 20, assure l'existence de $\delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t, u \in [0, 1] |t - u| < \delta \implies |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\forall t, u \in [0, 1], |t - u| < \delta \implies |g(t) - g(u)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Le rappel montre l'existence de $t_1, \dots, t_p \in [0, 1]$ tel que $[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^p]t_i - \delta, t_i + \delta[$.

La convergence simple de $(F(\varphi_n))_n$ vers g sur $[0, 1]$ entraîne l'existence de $N_1, \dots, N_p$ tel que $\forall n \geq N = \max(N_1, \dots, N_p), \forall i \in [1, p] |F(\varphi_n)(t_i) - g(t_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $t \in [0, 1]$, alors $\exists j \in [[1, p]]$ tel que $t \in]t_j - \delta, t_j + \delta[$, donc

$$\forall n \geq N, |F(\varphi_n)(t) - g(t)| \leq |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(t_j)| + |F(\varphi_n)(t_j) - g(t_j)| + |g(t_j) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On vient de montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \forall t \in [0, 1], |F(\varphi_n)(t) - g(t)| < \varepsilon$.

Soit $\varphi \in A$ et $(\varphi_n)_n$ une suite de A convergente vers φ dans E , alors d'après la question 19, $(F(\varphi_n))_n$ converge simplement vers $F(\varphi)$ sur $[0, 1]$ et on vient de montrer que $\|F(\varphi_n) - F(\varphi)\|_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc on conclut par la caractérisation séquentielle que F est continue sur A .

22. **Extraction d'une sous-suite qui converge simplement de $(F(\varphi_n))_n$**

- On commence par montrer que la suite $(F(\varphi_n))_n$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $Q \cap [0, 1]$.

- Soit $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ la suite des éléments des rationnels de $[0, 1]$, la première inégalité dans la question 17, montre que la suite $(F(\varphi_n)(r_1))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut y extraire une sous-suite convergente, qu'on notera $(F(\varphi_{\sigma_1(n)})(r_1))_n$.

- On considère maintenant la suite $(F(\varphi_{\sigma_1(n)})(r_2))_n$ qui est bornée pour les mêmes raisons, donc on y peut extraire une sous-suite convergente $(F(\varphi_{\sigma_2(n)})(r_2))_n$, ainsi la sous-suite $(F(\varphi_{\sigma_2(n)}))_n$ est convergente à la fois en r_1 et r_2 .

- Avec ce procédé, on construit une sous-suite $(F(\varphi_{\sigma_k(n)}))_n$ qui converge aux points $r_1, \dots, r_k$, ainsi on peut extraire de $(F(\varphi_n))_n$ une sous-suite convergente en tout point de $Q \cap [0, 1]$.

- On considère la suite $(g_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n = F(\varphi_{\sigma_n(n)})$, alors $(g_n)_{n \geq k}$ est une suite extraite de $(F(\varphi_{\sigma_k(n)}))_n$ pour tout $n \geq k$ et par suite $(g_n)_n$ converge aux points $r_k \forall n \geq k$, donc la suite $(g_n)_n$ converge en tout point r de $Q \cap [0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$.

La suite $(g_n(x))_n$ est de Cauchy

En effet soit $\varepsilon > 0$, alors d'après la question 20, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1]$, on a

$$|t - x| < \delta \implies |g_n(x) - g_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ or la densité de } Q \cap [0, 1] \text{ dans } [0, 1] \text{ entraîne l'existence de } r_k \in Q \cap [0, 1] \text{ tel que } |x - r_k| < \delta \text{ et par suite}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, |g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(r_k)| + |g_n(r_k) - g_m(r_k)| + |g_m(r_k) - g_m(x)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + |g_n(r_k) - g_m(r_k)|.$$

Mais la suite $(g_n(r_k))_n$ converge, donc elle est de Cauchy, d'où l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |g_n(r_k) - g_m(r_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$, donc $\forall n, m \geq N, |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$.

$\forall x \in [0, 1]$, la suite $(g_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc la suite $(g_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et c'est une suite extraite de $(F(\varphi_n))_n$.

23. **F admet un point fixe intérieur à A**

D'après la première inégalité de la question 17, on obtient $\forall \varphi \in A, \|F(\varphi)\|_0 \leq \|h\|_0 + c_\varphi \sup_{s \in [0, 1]} \|K_s\|_2 \leq$

$$\|h\|_0 + \|\mu\|_2 \sup_{s \in [0, 1]} \|K_s\|_2 = M'.$$

Soit $C = \overline{B}(0, M')$, alors C est une partie convexe fermée de E et d'après la question 21, $F : A \longrightarrow C$ est continue, de plus on a

g : 0 est intérieur à A .

h : $\overline{F(A)}$ est compacte. (d'après la question 22).

i : Pour tout $\varphi \in \partial A$, et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$. (c'est l'hypothèse faite à la fin de la page 5).

Ainsi les hypothèses faites dans la partie **D** sont satisfaites, ce qui entraîne que d'après 16, F admet un point fixe intérieur à A , donc de norme strictement inférieure à M .