

Banque PT 2007 — épreuve C

Partie I

Question I.1

Les deux fonctions sont paires.

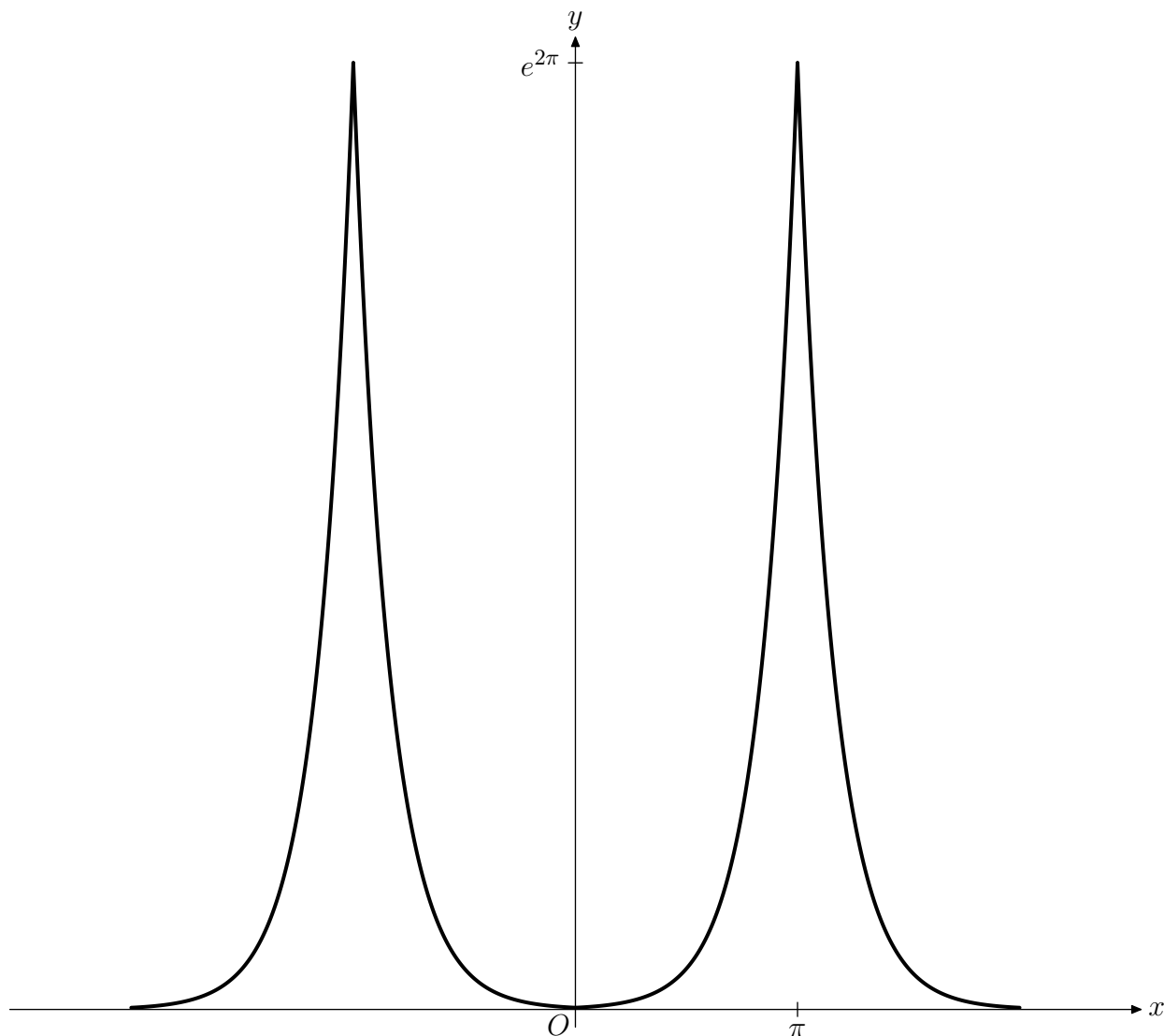


Figure 1 la fonction f_2

Remarque : $e^{2\pi} \approx 535$ et l'échelle en y est très petite : le point d'abscisse nulle est d'ordonnée 1, c'est un point anguleux, contrairement aux apparences. La courbe ne touche pas l'axe des x .

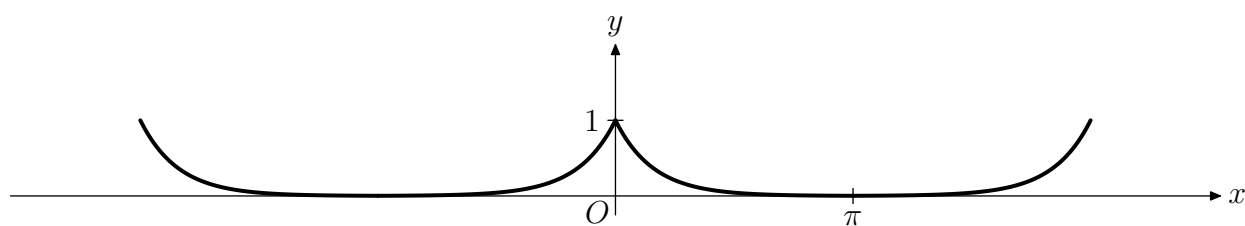


Figure 2 la fonction f_{-2}

Remarque : c'est ici le contraire, mais la courbe ne touche toujours pas l'axe des x . Le repère choisi est ici orthonormé. Les minimas, par exemple en l'abscisse π , sont des points anguleux, contrairement aux apparences.

Question I.2

C'est du cours : $a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$; et, pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$, et enfin $b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$, où on a posé $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Question I.3

Remarquons qu'ici f_a et f_{-a} sont paires donc, pour $n \geq 1$, $b_n(f_a) = b_n(f_{-a}) = 0$.

$$\text{I.3.a} \quad 2\pi a_0(f_a) = \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt = 2 \int_0^{\pi} e^{at} dt = 2 \left[\frac{e^{at}}{a} \right]_0^{\pi} = 2 \frac{e^{a\pi} - 1}{a}.$$

$$\text{Le calcul est le même pour } 2\pi a_0(f_{-a}) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{-a}(t) dt = 2 \frac{1 - e^{-a\pi}}{a}.$$

$$\text{I.3.b} \quad \text{Observons que } a_n(f_a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{at} \cos nt dt, \text{ grâce à la parité de } f_a.$$

On nous demande donc d'évaluer $\frac{\pi}{2} a_n(f_a)$, et on procède par double intégration par parties.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{at} \cos nt dt &= \left[\frac{e^{at}}{a} \cos nt \right]_0^{\pi} + \frac{n}{a} \int_0^{\pi} e^{at} \sin nt dt \\ &= \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a} + \frac{n}{a} \left[\frac{e^{at}}{a} \sin nt \right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{a^2} \int_0^{\pi} e^{at} \cos nt dt \\ &= \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a} - \frac{n^2}{a^2} \int_0^{\pi} e^{at} \cos nt dt. \end{aligned}$$

$$\text{I.3.c} \quad \text{On a déjà vu que } a_0(f_a) = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} \text{ et que pour } n \geq 1, b_n(f_a) = 0 \text{ puisque } f_a \text{ est paire.}$$

$$\text{On déduit des questions précédentes que, pour } n \geq 1, a_n(f_a) = \frac{2}{a\pi} ((-1)^n e^{a\pi} - 1) - \frac{n^2}{a^2} a_n(f_a) \text{ et, finalement : } a_n(f_a) = \frac{2a}{(n^2 + a^2)\pi} ((-1)^n e^{a\pi} - 1).$$

I.3.d Les calculs précédents n'ont fait aucune hypothèse sur le signe de a , et les formules précédentes restent valables.

$$\text{On peut les réécrire : } a_0(f_{-a}) = \frac{1 - e^{-a\pi}}{a\pi}, \text{ et, pour } n \geq 1, b_n(f_{-a}) = 0 \text{ et}$$

$$a_n(f_{-a}) = \frac{2a}{(n^2 + a^2)\pi} (1 - (-1)^n e^{a\pi}).$$

Question I.4

Une fonction f périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si il existe une subdivision d'une période de f telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ de la subdivision et admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle fermé $[x_k, x_{k+1}]$.

C'est le cas de f_a et de f_{-a} , qui sont à la fois continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Question I.5

On est dans les hypothèses où l'on peut appliquer la version "raffinée" du théorème de Dirichlet, et on peut écrire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_a(t) = a_0(f_a) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_a) \cos nt,$$

et une formule analogue pour f_{-a} .

$$\text{Or } a_0(f_a) + a_0(f_{-a}) = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{a\pi} \text{ et, pour } n \geq 1,$$

$$a_n(f_a) + a_n(f_{-a}) = \frac{2a}{(n^2 + a^2)\pi} (-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = \frac{4a}{(n^2 + a^2)\pi} (-1)^n \operatorname{sh} a\pi,$$

de sorte qu'on peut écrire, pour tout réel t , et donc aussi pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{a\pi} + \frac{4a \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \cos nt.$$

Question I.6

I.6.a Posant $t = 0$ dans l'égalité précédente, il vient $f_a(0) + f_{-a}(0) = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{a\pi} + \frac{4a \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$.

Or $f_a(0) = f_{-a}(0) = 1$, donc finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{a\pi - \operatorname{sh} a\pi}{2a^2 \operatorname{sh} a\pi}$.

I.6.b De même, posant $t = \pi$, il vient $f_a(\pi) + f_{-a}(\pi) = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{a\pi} + \frac{4a \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.

Or $f_a(\pi) + f_{-a}(\pi) = 2 \operatorname{ch} a\pi$, donc finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{a\pi \operatorname{ch} a\pi - \operatorname{sh} a\pi}{2a^2 \operatorname{sh} a\pi}$.

Partie II

Question II.1

II.1.a $(x, t) \mapsto \cos(xt)$ et $(x, t) \mapsto \operatorname{ch} t$ sont évidemment continues (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, donc g est également continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur ce même domaine.

On majore, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$: $|g(x, t)| \leq \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} \leq \frac{2}{e^t}$.

II.1.b Voici l'énoncé du théorème utile (continuité d'une intégrale impropre à paramètre), avec les notations de ce problème : on considère deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ et une fonction g continue sur $I \times J$.

On pose, pour $x \in I$, $\psi(x) = \int_J g(x, t) dt$. S'il existe une fonction de domination $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$\forall (x, t) \in I \times J, |g(x, t)| \leq \varphi(t)$ et telle que l'intégrale $\int_J \varphi(t) dt$ est absolument convergente, alors on peut affirmer que la fonction ψ est définie et continue sur tout I .

Les hypothèses sont ici remplies, en posant $\varphi(t) = 2e^{-t}$ car on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est absolument convergente. On conclut donc que ψ existe et est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Question II.2

II.2.a On part du membre de droite :

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k X^k + \frac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1+X} = \frac{1 - (-1)^{N+1} X^{N+1}}{1 - (-X)} + \frac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1+X} = \frac{1}{1+X}.$$

Posant $X = e^{-2t}$, on observe que $\frac{1}{1+X} = \frac{1}{1+e^{-2t}} = \frac{e^t}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^t}{2 \operatorname{ch} t}$, donc

$$\frac{e^t}{2 \operatorname{ch} t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}},$$

et il suffit de multiplier par $2e^{-t}$ pour obtenir :

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = 2e^{-t} \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \right).$$

II.2.b On remplace simplement $\frac{1}{\operatorname{ch} t}$ dans l'expression intégrale de $\psi(x)$.

Question II.3

II.3.a Pour tout réel x et tout $t \geq 0$, $e^{-t} \leq 1$, $|\cos xt| \leq 1$ et $1 + e^{-2t} \geq 1$ de sorte que $|h(x, t)| \leq 1$: on en déduit que h est bien bornée sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

On en profite pour démontrer l'existence (qui semble sous-entendue par l'énoncé) de $R_N(x) = \int_0^{+\infty} (-1)^{N+1} h(x, t) e^{-2(N+1)t} dt$: en effet, on a la majoration $\left| (-1)^{N+1} h(x, t) e^{-2(N+1)t} \right| \leq e^{-2(N+1)t}$, or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t} dt$ converge, donc l'intégrale qui définit $R_N(x)$ est absolument convergente.

II.3.b La majoration précédente montre que, pour tout N et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_N(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t} dt = \frac{1}{2(N+1)}$$

qui tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, donc, pour tout réel x , on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0$.

Question II.4

On procède par double intégration par parties : à k et x fixés, on peut écrire, pour tout réel $A > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-t} \cos xt e^{-2kt} dt &= \left[-\frac{e^{-(2k+1)t}}{2k+1} \cos xt \right]_0^A - \frac{x}{2k+1} \int_0^A e^{-(2k+1)t} \sin xt dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(2k+1)t}}{2k+1} \cos xt + \frac{x e^{-(2k+1)t}}{(2k+1)^2} \sin xt \right]_0^A - \frac{x^2}{(2k+1)^2} \int_0^A e^{-(2k+1)t} \cos xt dt \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient $J_k(x) = \frac{1}{2k+1} - \frac{x^2}{(2k+1)^2} J_k(x)$ donc finalement

$$J_k(x) = \frac{2k+1}{x^2 + (2k+1)^2}.$$

Question II.5

Le résultat de II.2.c se réécrit, pour tout réel x : $\psi(x) = 2 \sum_{k=0}^N (-1)^k J_k(x) + 2R_N(x)$. Or on a vu que

$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0$: c'est exactement dire que $\psi(x)$ est la somme de la série des $2(-1)^k J_k(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{avec } u_k(x) = (-1)^k \frac{2(2k+1)}{x^2 + (2k+1)^2}.$$

Partie III

Question III.1

Soit $t \notin \pi\mathbb{Z}$. On a alors $e^{2it} \neq 1$ donc on peut écrire

$$\sum_{k=-N}^N e^{2ikt} = \sum_{k=-N}^N (e^{2it})^k = e^{-2iNt} \frac{e^{2(2N+1)it} - 1}{e^{2it} - 1} = \frac{e^{(2N+2)it} - e^{-2Nt}}{e^{2it} - 1} = \frac{e^{(2N+1)it} - e^{-(2N+1)it}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}.$$

Question III.2

III.2.a La fonction S_N est clairement π -périodique, et on a $\lim_{t \rightarrow 0} S_N(t) = 2N+1$. On peut donc prolonger S_N en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier en posant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{S}_N(k\pi) = 2N+1$.

III.2.b $\tilde{S}_N$ est π -périodique, donc aussi 2π -périodique.

III.2.c D'après l'écriture sommatoire de $S_N(t)$, qui est toujours valable pour $\tilde{S}_N(t)$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\tilde{S}_N(t)| \leq$

$$\sum_{k=-N}^N |e^{2ikt}| = 2N+1, \text{ donc } \tilde{S}_N \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.$$

Question III.3

L'application $t \mapsto e^{-2at} \tilde{S}_N(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et sa valeur absolue est majorée par $(2N+1)e^{-2at}$. Comme $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2at} dt$ converge, donc $I_{a,N}$ est aussi convergente.

Question III.4

Chaque intégrale $\int_0^{+\infty} e^{2ikt} e^{-2at} dt$ est absolument convergente (donc une intégrale convergente), puisque $|e^{2ikt} e^{-2at}| \leq e^{-2at}$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-2at} dt$ converge.

Développant $\tilde{S}_N(t)$ grâce à la formule sommatoire obtenue en III.1, on trouve directement la première égalité.

Or on peut, grâce à la définition d'une intégrale impropre, puis à la formule de Chasles, écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{2ikt} e^{-2at} dt &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{2ikt} e^{-2at} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} e^{2ikt} e^{-2at} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{2ikt} e^{-2at} dt \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{2ikt} e^{-2at} dt \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = 2t$ fournit $\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{2ikt} e^{-2at} dt = \frac{1}{2} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du$, et la deuxième égalité en découle aussitôt.

Question III.5

III.5.a Si $t \in [0, \pi[$, $g_a(t) = f_{-a}(t) = e^{-at}$. Si $t \in [\pi, 2\pi[$, $g_a(t) = e^{-a\pi} f_{-a}(t - \pi)$ or $t - \pi \in [0, \pi[$, donc finalement $g_a(t) = e^{-a\pi} e^{-a(t-\pi)} = e^{-at}$. On a bien montré que pour t de $[0, 2\pi[$, on dispose de $g_a(t) = e^{-at}$.

Remarquons que $g_a(2\pi - 0) = e^{-2a\pi} \neq 1 = g_a(0) = g_a(2\pi)$, donc cette fois g_a est continue par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais non continue.

III.5.b Dans la formule obtenue en III.4, on peut intervertir les deux symboles $\sum$, puisque la première somme est finie ; on a donc

$$I_{a,N} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=-N}^N \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \sum_{k=-N}^N \int_0^{2\pi} e^{ikv} e^{-av} dv,$$

en utilisant le changement de variable $v = u - 2p\pi$.

$$\text{Réécrivons } \sum_{k=-N}^N e^{ikv} e^{-av} = e^{-av} + e^{-av} \sum_{k=1}^N (e^{ikv} + e^{-ikv}) = e^{-av} + 2e^{-av} \sum_{k=1}^N \cos kv.$$

Or, par définition des coefficients de Fourier, $\int_0^{2\pi} e^{-av} dv = 2\pi a_0(g_a)$ et $\int_0^{2\pi} e^{-av} \cos kv dv = \pi a_k(g_a)$.

$$\text{Ainsi } I_{a,N} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \times \left(2\pi a_0(g) + 2 \sum_{k=1}^N \pi a_k(g_a) \right) = \pi \left(\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \right) \times \left(\sum_{k=0}^N a_k(g_a) \right).$$

$$\text{III.5.c } \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} = \frac{1}{1 - e^{-2a\pi}}, \text{ donc } I_{a,N} = \frac{\pi}{1 - e^{-2a\pi}} \sum_{k=0}^N a_k(g_a).$$

Question III.6

On évalue, avec la double intégration par parties que nous avons déjà effectuée à plusieurs reprises :

$$a_0(g_a) = \frac{1 - e^{-2a\pi}}{2a\pi} \text{ et } a_k(g_a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-at} \cos kt dt = \frac{a(1 - e^{-2a\pi})}{\pi(a^2 + k^2)}.$$

On en déduit que $I_{a,N} = \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^N \frac{a}{a^2 + k^2}$, et le résultat de la question I.5.b montre que quand $N \rightarrow +\infty$,

$$I_{a,N} \text{ a une limite égale à } I_a = \frac{1}{2a} + \frac{a\pi \operatorname{ch} a\pi - \operatorname{sh} a\pi}{2a \operatorname{sh} a\pi} = \frac{\pi}{2 \operatorname{th} a\pi}.$$