

ÉCOLE POLYTECHNIQUE, MATH 1 2005

PREMIÈRE PARTIE

1. On a $(X^p)^{(k)} = p(p-1)\dots(p-k+1)X^{p-k}$ (égal à 0 si $k > p$) d'où on tire

$$\pi_n(X^p) = \begin{cases} p! & \text{si } p \leq n \\ \frac{p!}{(p-n)!} & \text{si } p > n \end{cases}.$$

2. a) $A_n f \in E_n$ est immédiat (produit de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).

Pour $B_n g$ on va utiliser le théorème de Lebesgue de dérivabilité sous le signe intégral : soit $\varphi(x, t) = g'(xt)$.

- $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) = t^k g^{(k+1)}(xt)$ est continue par rapport à x et à t pour $k \leq n-1$,
- $\left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \|g^{(k+1)}\| \leq \pi_{n-1}(g)$ qui est bien sûr intégrable sur $[0, 1]$,

on peut alors en déduire que $B_n g$ est $n-1$ -fois dérivable et à dérivée $n-1$ -ième continue, soit $B_n g \in E_{n-1}$.

b) A_n et B_n sont des applications linéaires par linéarité de la multiplication et de l'intégration. On a vu à la question précédente que $A_n(E_n) \subset E_n$ donc $A_n \in \mathcal{L}(E_n)$ et $B_n \in \mathcal{L}(E_n, E_{n-1})$. Procédons maintenant au calcul des normes.

- Pour A_n : $(xf(x))^{(k)} = xf^{(k)}(x) + kf^{(k-1)}(x)$ grâce à la formule de Leibniz donc $|(xf(x))^{(k)}| \leq \|f^{(k)}\| + k\|f^{(k-1)}\| \leq (n+1)\pi_n(f)$ d'où $\pi_n(A_n f) \leq (n+1)\pi_n(f)$, A_n est continue, de norme $\leq n+1$. Or, si $f = X^n$ alors $\pi_n(f) = n!$ et $\pi_n(A_n f) = (n+1)!$ donc on a égalité soit $\boxed{\|A_n\| = n+1}$.

- Pour B_n : on sait que $(B_n g)^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k g^{(k+1)}(xt) dt$ donc, en majorant $|g^{(k+1)}(xt)|$ par $\|g^{(k+1)}\|$ et t^k par 1, on obtient $|(B_n g)^{(k)}(x)| \leq \|g^{(k+1)}\| \leq \pi_n(g)$ pour $k \leq n-1$. Ceci nous donne $\pi_{n-1}(B_n g) \leq \pi_n(g)$, B_n est continue, de norme ≤ 1 . En prenant $g = X$ alors $(B_n g)(x) = 1$ donc $\pi_{n-1}(B_n g) = 1 = \pi_n(g)$, on a égalité d'où $\boxed{\|B_n\| = 1}$.

3. On remarque que $(B_n g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 g'(u) du = \frac{g(x) - g(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $(B_n g)(0) = g'(0)$ donc

$$(B_n A_n f)(x) = \frac{1}{x} [A_n f(x) - A_n f(0)] = f(x) \text{ même si } x = 0$$

soit $\boxed{B_n A_n = \text{Id}_{E_n, E_{n-1}}}$. De même, on vérifie que $\boxed{(A_{n-1} B_n g)(x) = g(x) - g(0)}$.

4. a) $\text{Im } A_0 = \{g \in \mathcal{C}^0 \mid \exists f \in \mathcal{C}^0, g = Xf\}$.

Si $g \in \text{Im } A_0$ alors $g(0) = 0$ et $\frac{g(x)}{x} = f(x) \rightarrow f(0)$ quand $x \rightarrow 0$ donc $g \in F_0$.

Si $g \in F_0$ alors, en posant $f = \frac{g}{X}$, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ alors $f \in \mathcal{C}^0$ donc $g \in \text{Im } A_0$.

Conclusion : on a bien $\boxed{\text{Im } A_0 = F_0}$.

- b) $n > 0$ donc, si $g \in \text{Im } A_n$, alors $g(0) = 0$ et $g = Xf$. On a $f = B_n g$ car $g(0) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^n$ par définition. Par Leibniz $g^{(n)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$ d'où

$$\frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = \underbrace{f^{(n)}(x)}_{\rightarrow f^{(n)}(0)} + n \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}}_{\rightarrow f^{(n)}(0)}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = (n+1)f^{(n)}(0)$ soit $\boxed{\text{Im } A_n \subset F_n}$.

- c) Si $g \in F_n$ alors $f = \frac{g}{X} = B_n g \in \mathcal{C}^{n-1}$. $\frac{g}{X}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour $x \neq 0$.

$$f^{(n-1)}(x) = \int_0^1 t^{n-1} g^{(n)}(xt) dt \text{ d'où}$$

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \int_0^1 t^n \frac{g^{(n)}(xt) - g^{(n)}(0)}{xt} dt.$$

Soit $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x}$ alors

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} - \frac{l}{n+1} = \int_0^1 t^n \left[\frac{g^{(n)}(xt) - g^{(n)}(0)}{xt} - l \right] dt$$

d'où, si $\varepsilon > 0$ alors $\exists \eta > 0$ tel que $|x| \leq \eta \Rightarrow \left| \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} - l \right| \leq \varepsilon$. On obtient alors la majoration, pour $|x| \leq \eta$, $x \neq 0$,

$$\left| \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} - \frac{l}{n+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ i.e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \frac{l}{n+1}.$$

Remarques : on a $l = g^{(n+1)}(0)$ et f est n fois dérivable sur $[-1, 1]$, on peut aussi appliquer le théorème de Lebesgue de convergence dominée.

- d) En utilisant la formule de Leibniz on a $g^{(n)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$ puis $g^{(n)}(0) = n f^{(n-1)}(0)$ d'où

$$f^{(n)}(x) = \frac{g^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x)}{x} = \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} - n \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

or on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = l$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \frac{l}{n+1}$ donc $f^{(n)}(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow 0$ et cette limite est égale à $l - n \frac{l}{n+1} = \frac{l}{n+1}$

donc f est dérivable n -fois en 0 et sa dérivée est continue en 0.

Conclusion : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$, $f \in E_n$ et $g = A_n f \in \text{Im } A_n$. On a bien

$$\boxed{A_n = \text{Im } F_n}.$$

DEUXIÈME PARTIE

5. a) On fait la démonstration en plusieurs étapes :

- si $a \geq 0$, $b \geq 0$ alors $\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.
- $\alpha(x) = \frac{x}{1+x}$ croît de 0 à 1 sur $[0, +\infty[$ donc $\frac{1}{2^n} \alpha(\pi_n(f)) \leq \frac{1}{2^n}$ ce qui permet d'assurer la définition de δ .

- $\alpha(\pi_n(f_1 - f_2)) \leq \alpha(\pi_n(f_1 - f_3)) + \alpha(\pi_n(f_3 - f_2))$ grâce à l'inégalité triangulaire sur π_n et à la première propriété. On fait alors la somme de 0 à N et comme toutes ces quantités ont une limite on obtient bien

$$\delta(f_1 - f_2) \leq \delta(f_1 - f_3) + \delta(f_3 - f_2).$$

- b) (i) $\Rightarrow$ (ii) : Comme $\alpha(\pi_n(f)) \leq 2^n \delta(f)$ (où la fonction α a été étudiée au 5.a) alors
- $$\lim_{i \rightarrow +\infty} \delta(f_i - f) = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow +\infty} \alpha(\pi_n(f_i - f)) = 0. \text{ Or } \alpha^{-1}(x) = \frac{x}{1-x} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ donc } \lim_{i \rightarrow +\infty} \pi_n(f_i - f) = 0.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, f_i^{(n)} \xrightarrow[[-1,1]]{C.U.} f.$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Posons $a_{n,i} = \frac{1}{2^n} \alpha(\pi_n(f_i - f))$.

- $|a_{n,i}| \leq \frac{1}{2^n}$ donc la série $\sum a_{n,i}$ converge normalement par rapport à $i \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_{n,i} = 0$ par hypothèse,

le théorème de double limite s'applique donc et $\delta(f_i - f)$ admet une limite nulle.

- c) On peut prendre par exemple $\delta_{k,\beta}(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} k^n \beta(\pi_n(f))$ où $k < 1$ et β est une fonction croissante définie sur $[0, +\infty[$, bornée, nulle en 0, dérivable en 0 et vérifiant la sous-additivité $\beta(a+b) \leq \beta(a) + \beta(b)$, par exemple $\beta(x) = \text{Arctan}(x)$.
6. a) Comme à la question 3, on a $\boxed{BA = \text{Id}_E}$ et $\boxed{ABg(x) = g(x) - g(0)}$.

b) Cas de A :

- $\boxed{\text{Im } A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}}$: en effet, $f \in \text{Im } A \Rightarrow f(0) = 0$ et si $f(0) = 0$ alors $f = ABf \in \text{Im } A$.
- $\boxed{\ker A = \{0\}}$: en effet, si $Af = 0$ alors $BAf = f = 0$.

Cas de B :

- $\boxed{\text{Im } B = E}$ car $BAf = f$.
- $\boxed{\ker B = C \text{ ensemble des fonctions constantes}}$: si $f \in C$ alors $Bf = 0$ et si $Bf = 0$ alors $ABf(x) = f(x) - f(0) = 0$ donc $f \in C$.

7. a) Montrons par récurrence sur n que

$$\boxed{(B^n g)(x) = \frac{1}{x^n} \left[g(x) - g(0) - xg'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) \right]}.$$

Ceci est vrai si $n = 1$ d'après les formules déjà prouvées.

On suppose la propriété vraie à l'ordre n . Grâce à la formule de Taylor-Young, on

a $(B^n g)(0) = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ d'où

$$\begin{aligned} (B^{n+1}g)(x) &= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x^n} \left(g(x) - g(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) \right) - \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \right] \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \left[g(x) - g(0) - xg'(0) - \dots - \frac{x^n}{(n)!} g^{(n)}(0) \right] \end{aligned}$$

ce qui fini de prouver la propriété.

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral d'où

$$(B_n g)(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(u) du = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(xt) dt$$

en posant $u = xt$. On a donc $\varphi_n(t) = \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Remarque : l'énoncé s'attendait à une utilisation du théorème de Fubini mais cela ne s'imposait pas ici...

b) On vient de voir que $(B^n g)(0) = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$.

c) On a $(ABg)(x) = g(x) - g(0)$ ce qui assure le résultat lorsque $n = 1$.
On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante :

$$(A^n B^n g)(x) = g(x) - g(0) - xg'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0).$$

On a alors

$$\begin{aligned} (A^{n+1} B^{n+1} g)(x) &= (A^n A B B^n g)(x) = (A^n B^n g)(x) - \underbrace{A^n B^n g(0)}_{= \frac{g^{(n)}(0)}{n!}} \\ &= g(x) - g(0) - xg'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) - x^n \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule.

Remarque : vu la façon d'aborder les questions dans ce corrigé, il n'était pas nécessaire de faire cette démonstration !

d) Comme $(A^n f)(x) = x^n f(x)$ alors en revenant à la formule du **7.a** on a bien

$$(A^n B^n g)(x) = \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(u) du.$$

8. Soit $\mathcal{K}_n = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0\}$, on va prouver que $\text{Im } A^n = \mathcal{K}_n$.

- Si $f \in \text{Im } A^n$ alors $f = X^n g$ où $g \in E$ donc, par dérivations successives, on a $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ soit $f \in \mathcal{K}_n$.
- Si $f \in \mathcal{K}_n$ alors $(B^n f)(x) = \frac{1}{x^n} f(x) \in E$ car on a vu que $\text{Im } B = E$ donc $\text{Im } B^n = E$. On a ainsi $f \in \text{Im } A^n$.

Vu l'expression de $B^n f$ on en tire immédiatement la conclusion : $\ker B^n = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

TROISIÈME PARTIE

9. Montrons que $\varphi \circ A \in E'$: on a $(x f_i(x))^{(n)} = x f_i^{(n)}(x) + n f_i^{(n-1)}(x)$ donc

$$\|(A f_i)^{(n)} - (A f)^{(n)}\| \leq \|f_i^{(n)} - f^{(n)}\| + n \|f_i^{(n-1)} - f^{(n-1)}\|.$$

On a ainsi $(A f_i)^{(n)} \xrightarrow[-1,1]{C.U.} (A f)^{(n)}$ et, en utilisant la question **5.b**, on a $\delta(A f_i - A f) \rightarrow 0$.

Conclusion : $\varphi(A f_i)$ tend vers $\varphi(A f)$ i.e. $\varphi \circ A \in E'$.

Montrons maintenant que $\varphi \circ B \in E'$:

$$\begin{aligned} |(B f_i)^{(n)}(x) - (B f)^{(n)}(x)| &= \left| \int_0^1 t^n (f_i^{(n+1)}(xt) - f^{(n+1)}(xt)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f_i^{(n+1)}(xt) - f^{(n+1)}(xt)| dt \leq \|f_i^{(n+1)} - f^{(n+1)}\| \end{aligned}$$

et, là encore avec le résultat du **5.b**, $\delta(B f_i - B f) \rightarrow 0$.

Conclusion : $\varphi(B f_i)$ tend vers $\varphi(B f)$ i.e. $\varphi \circ B \in E'$.

10. • Déterminons $\text{Im}(A')^n$: on sait (cf. **6.a**) que $BA = \text{Id}_E$ donc, par une récurrence immédiate, $B^n A^n = \text{Id}_E$.

Soit $\varphi \in E'$, on a alors $\varphi = \varphi B^n A^n = (A')^n \varphi \circ B^n$ donc $\boxed{\text{Im}(A')^n = E'}$.
Comme A^n est surjective alors on a

$$\forall f \in E, \varphi \circ B^n(f) = 0 \Rightarrow \forall g \in E, \varphi \circ B^n \circ A^n(g) = 0 \Rightarrow \varphi(g) = 0,$$

on déduit immédiatement que $\boxed{\ker(B')^n = \{0\}}$.

$\ker(A')^n$:

– Montrons tout d'abord que les $\varphi_{0;i}$ sont dans ce noyau :

$$(A')^n(\varphi_{0;i})(g) = \varphi_{0;i}(X^n g) = (X^n g(x))^{(i)} = 0.$$

– La famille $(\varphi_{0;i})$ est libre :

si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_{0;i} = 0$ alors $\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (X^p)^{(i)}(0) = 0$ or le seul terme non nul parmi les $(X^p)^{(i)}(0)$ est celui qui correspond à $i = p$ donc $\lambda_p = 0$.

– La famille est génératrice : si $\varphi \in \ker(A')^n$ alors, comme $\text{Im } B^n = E'$, $\forall g \in E'$, $\varphi \circ A^n B^n = 0$ donc, vu la question 7.c, $\varphi(g - P_{n-1}) = 0$. On a ainsi, pour toute fonction $g \in E'$,

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \varphi(P_{n-1}) = \varphi \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} g^{(i)}(0) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(X^i)}{i!} \underbrace{g^{(i)}(0)}_{=\varphi_{0;i}(g)} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_{0;i} \right) (g) \end{aligned}$$

donc $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_{0;i})$.

Conclusion : $\boxed{\ker(A')^n = \text{Vect}(\varphi_{0;i})_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}}$ et les $\varphi_{0;i}$ forment une base.

11. On a à résoudre une équation linéaire.

- $(A')^n \left(\frac{1}{n!} \varphi_{0;n} \right) (f) = \frac{1}{n!} \varphi_{0;n}(X^n f) = \varphi_{0;0}(f)$ donc $\frac{1}{n!} \varphi_{0;n}$ est une solution particulière.
- $\ker(A')^n = \text{Vect}(\varphi_{0;i})_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\frac{1}{n!} \varphi_{0;n} + \text{Vect}(\varphi_{0;i})_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}}$.

12. On procède par récurrence sur r :

- $r = 2$: on a immédiatement $\ker U_1 + \ker U_2 \subset \ker(U_1 U_2)$, montrons l'inclusion dans l'autre sens :
si $x \in \ker(U_1 U_2)$ alors $U_2(x) \in \ker U_1 = U_2(\ker U_1)$ donc il existe $x_1 \in \ker U_1$ tel que $U_2(x) = U_2(x_1)$. On a alors $x - x_1 \in \ker U_2$ soit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \ker U_1$ et $x_2 \in \ker U_2$.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre r : on pose $V = U_1 \dots U_r$.
On a là aussi $\ker U_1 + \dots + \ker U_r + \ker U_{r+1} \subset \ker U_1 \dots U_r U_{r+1}$.
Soit $x \in \ker U_1 \dots U_r U_{r+1}$, on pose $x_1 = U_2 \dots U_{r+1}(x)$, par conséquent $x_1 \in \ker U_1$.
Or $\ker U_1 = U_j(\ker U_1)$ soit

$$\ker U_1 = U_2(\ker U_1) = U_2 U_3(\ker U_1) = \dots = U_2 \dots U_{r+1}(\ker U_1).$$

Il existe donc $y_1 \in \ker U_1$ tel que $x_1 = U_2 \dots U_{r+1}(y_1)$ et $U_2 \dots U_{r+1}(x - y_1) = x_1 - x_1 = 0$ soit $x - y_1 \in \ker U_2 \dots U_{r+1}$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence, il existe $y_i \in \ker U_i$ tels que $x - y_1 = y_2 + \dots + y_{r+1}$.

On a prouvé l'inclusion dans l'autre sens d'où l'égalité.

13. a) Soit $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ alors $T_Q = b_0 \text{Id} + b_1 A + \dots + b_n A^n$ et $\varphi \circ T_Q = b_0 \varphi + b_1 \varphi \circ A + \dots + b_n \varphi \circ A^n$ donc $\varphi \circ T_Q$ est une somme d'éléments de E' qui appartient à E' .

b) On écarte ici le cas trivial où $Q = 0$, $\text{Im } T_0 = \{0\}$ et $\ker T_0 = E'$.

Soit $Q = b_n(X - \alpha_1)^{q_1} \cdots (X - \alpha_r)^{q_r}$ la décomposition de Q en produit de facteurs sur $\mathbb{C}$ (les α_i sont supposés être distincts). On a alors $T'_Q = b_n(T'_{\alpha_1})^{q_1} \cdots (T'_{\alpha_r})^{q_r}$.

- Si $\alpha_i \in [-1, 1]$ alors d'après le résultat (ii), $(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ est surjectif.
- Si $\alpha_i \notin [-1, 1]$ alors $g = T_{\alpha_i} \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{x - \alpha_i} \in E$ car le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1, 1]$ donc T_{α_i} est bijectif, il en est de même de T'_{α_i} car $\varphi \circ T_{\alpha_i} = \psi \Leftrightarrow \varphi = \psi \circ (T_{\alpha_i})^{-1}$.

Conclusion : tous les T'_{α_i} sont surjectifs, il en est de même de T'_Q donc $\boxed{\text{Im } T'_Q = E'}$.

Cherchons le noyau de T'_Q .

- Si Q n'a aucune racine dans $[-1, 1]$ alors T'_Q est bijectif en tant que composé de bijections. Dans ce cas, on a $\ker T'_Q = \{0\}$.

- Dans le cas contraire, soit $T'_Q = b_n \prod_{i=1}^p (T'_{\alpha_i})^{q_i} \prod_{i=p+1}^r (T'_{\alpha_i})^{q_i}$ où on a mis en

premier les racines dans $[-1, 1]$ (le produit est commutatif). On utilise la question 12 avec $U_i = (T'_{\alpha_i})^{q_i}$: les $(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ commutent 2 à 2, il reste à démontrer que $U_j(\ker U_i) = \ker U_i$ ce qui s'écrit $\boxed{(T'_{\alpha_j})^{q_j}(\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i}) = \ker(T'_{\alpha_i})^{q_i}}$.

Or, d'après le (ii) admis, les $(\varphi_{\alpha_i;k})_{k \in \llbracket 0, q_i-1 \rrbracket}$, forment une base de $\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ donc $\text{Vect } U_i = \text{Vect}(\varphi_{\alpha_i;k})_{k \in \llbracket 0, q_i-1 \rrbracket}$. Calculons $T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k})$:

$$\begin{aligned} \forall f \in E, T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k})(f) &= \varphi_{\alpha_i;k} \circ T_{\alpha_j}(f) = (T_{\alpha_j}(f))^{(k)}(\alpha_i) \\ &= [(X - \alpha_j)f]^{(k)}(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_j)f^{(k)}(\alpha_i) + kf^{(k-1)}(\alpha_i) \end{aligned}$$

soit $T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k}) = (\alpha_i - \alpha_j)\varphi_{\alpha_i;k} + k\varphi_{\alpha_i;k-1}$. Comme $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$, on a

$$\text{Vect}(T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k}))_{k \in \llbracket 0, \alpha_j-1 \rrbracket} = T'_{\alpha_j}(U_i) = U_i$$

puis, par une récurrence immédiate, que $(T'_{\alpha_j})^{q_j}(U_i) = U_i$. On a donc

$$\ker T'_Q = \ker(T'_{\alpha_1})^{q_1} + \cdots + \ker(T'_{\alpha_r})^{q_r} = \ker(T'_{\alpha_1})^{q_1} + \cdots + \ker(T'_{\alpha_p})^{q_p}$$

car $\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i} = \{0\}$ si $i \geq p+1$.

On sait qu'une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\ker(T'_{\alpha_i})$ est donnée par les $\varphi_{\alpha_i;j}$, $j = 0, \dots, q_i - 1$. Il reste à prouver que les $\varphi_{\alpha_i;j}$ forment une base de $\ker T'_Q$ pour pouvoir conclure.

Soit $\sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=0}^{q_i-1} \lambda_{i,j} \varphi_{\alpha_i;j} \right) = 0$ et $f_{p,k} = (X - \alpha_1)^{q_1} \cdots (X - \alpha_{p-1})^{q_{p-1}} (X - \alpha_r)^k = g(X - \alpha_r)^k$, $k \leq q_p - 1$ alors $\varphi_{\alpha_i;j}(f_{p,k}) = 0$ pour $i \leq p-1$ et $j \leq q_i - 1$.

Pour $i = p$, c'est plus compliqué : $f_{p,k}^{(j)} = \sum_{h=0}^j \binom{j}{h} g^{(j-h)} [(X - \alpha_p)^k]^{(h)}$.

Si $j < k$ alors $f_{p,k}^{(j)}(\alpha_p) = 0$, si $j \geq k$ alors, grâce à la formule ci-dessus,

$$f_{p,k}^{(j)}(\alpha_p) = \binom{j}{k} g^{(j-k)}(\alpha_p) k! = a_{j,k} \text{ et } a_{k,k} \neq 0.$$

On obtient les relations $\sum_{j=k}^{p-1} a_{j,k} \lambda_{p,j} = 0$ pour $k \in \llbracket 0, q_p - 1 \rrbracket$. C'est un système triangulaire et les coefficients sont tous non nuls, on en déduit que $\lambda_{p,j} = 0$ pour tout j .

Comme on peut faire ceci avec les fonctions $f_{i,j}$ on en déduit que $\lambda_{i,j} = 0$. La famille $(\varphi_{\alpha_i;j})$ est donc libre et $\boxed{\text{c'est bien une base de } \ker T'_Q}$.