

EXERCICE 1

1. *Formule des probabilités composées.*

Pour tous évènements $A_1, \dots, A_n$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

3. Les valeurs prises par X sont les entiers naturels non nuls : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Remarque. La définition de X dans l'énoncé sous-entend que le nombre de sauts réussis est presque sûrement fini, ce qui à ce stade n'est pas évident, mais sera vérifié en question 8.

4. On a $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2}|S_1) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5. L'évènement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si les deux premiers sauts ont été réussis, mais le troisième a été raté. Autrement dit : $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$.

Par conséquent d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\mathbb{P}(\overline{S_3}|S_1 \cap S_2) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6. De la même façon qu'en 5., on a $[X = n] = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}$.

7. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1) \dots \mathbb{P}(S_n|S_1 \cap \dots \cap S_{n-1})\mathbb{P}(\overline{S_{n+1}}|S_1 \cap \dots \cap S_n) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(n-1)!}.\end{aligned}$$

8. On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \quad (\text{car les deux séries convergent}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1.\end{aligned}$$

9. La variable aléatoire X est à valeurs positives, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)(n-1)!} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1)(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$ sont deux séries convergentes, donc $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(X = n)$ est convergente, donc X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)!}.$$

Finalement d'après **2.** et **8.**, on a $\mathbb{E}(X) = e - 1$.

EXERCICE 2

1.1. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a $\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive), donc

$$|u_n| = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

De plus pour $t \in [0; \pi/2]$, on a $\cos(t) \in [0; 1]$ donc $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$.

Ainsi par croissance de l'intégrale, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.

Conclusion. $(|u_n|)$ est bien décroissante.

1.2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit sur $]0; \pi/2]$ la fonction f_n par $f_n(t) = \cos^n(t)$.

On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- pour $t \in]0; \pi/2]$, $|\cos(t)| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$.

Ainsi (f_n) converge simplement sur $]0; \pi/2]$ vers la fonction $f : t \mapsto 0$;

- les fonctions f_n , pour $n \in \mathbb{N}$, et la fonction f , sont continues (par morceaux) sur $]0; \pi/2]$;

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0; \pi/2]$, $|f_n(t)| \leq 1$, or $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0; \pi/2]$.

Conclusion. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} 0 dt = 0.$$

1.3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$, et d'après les deux questions précédentes, $(|u_n|)$ est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0.

Conclusion. D'après le critère des séries alternées, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

2.1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, donc $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

Appliquée à $\theta = t/2$, cette égalité donne : $\cos^2(t/2) = \frac{1+\cos(t)}{2}$.

2.2. En se rappelant qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est $x \mapsto \tan(x)$, on a :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos^2(t/2)} dt = \frac{1}{2} [2\tan(t/2)]_0^{\pi/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1.$$

2.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties (sur des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$), on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt \\ &= \left[\sin(t) \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Le crochet est nul car $\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$, et avec $\sin^2 = 1 - \cos^2$ on obtient donc

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)) dt \\ &= (n+1)(|u_n| - |u_{n+2}|) \quad (\text{linéarité de l'intégrale}), \end{aligned}$$

et finalement en isolant $|u_{n+2}|$ on obtient $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n|$.

2.3.2. Montrons par récurrence double, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : |u_n| \geq \frac{1}{n+1}.$$

- $|u_0| = \frac{\pi}{2} \geq 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- $|u_1| = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = 1 \geq \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, alors

$$|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n| \geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \quad (\text{par hyp. de réc.})$$

$$\text{Donc } |u_{n+2}| \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}.$$

D'où la conclusion voulue par récurrence.

2.3.3. Il s'agirait d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur $]0; \pi/2]$, en espérant obtenir l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos^n(t) \right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt.$$

Malheureusement ce théorème ne s'applique pas. Posons $v_n : t \mapsto (-1)^n \cos^n(t)$. On a $\int_0^{\pi/2} |v_n| = |v_n| \geq \frac{1}{n+1}$, terme général d'une série divergente, donc par comparaison $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\pi/2} |v_n|$ diverge.

Conclusion. L'hypothèse $\sum_{n \geq 0} \int_0^{\pi/2} |v_n|$ converge, n'est pas vérifiée.

2.4. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- pour $t \in]0; \pi/2]$, $V_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1 + \cos(t)}$ (série géométrique de raison $-\cos(t) \in]-1; 1[)$.
Donc (V_n) converge simplement sur $]0; \pi/2]$ vers la fonction $V : t \mapsto \frac{1}{1 + \cos(t)}$;
- les fonctions V_n et la fonction V sont continues (par morceaux) sur $[0; \pi/2]$;
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0; \pi/2]$,

$$|V_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^n (-\cos(t))^k \right| = \left| \frac{1 - (-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} \right| \underset{\text{i.T.}}{\leq} \frac{2}{1 + \cos(t)}.$$

Or $t \mapsto \frac{2}{1 + \cos(t)}$ est continue sur le segment $]0; \pi/2]$, prolongeable par continuité en 0, donc intégrable.

Conclusion. D'après notre théorème et la question **2.2.**, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} V_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} V(t) dt = 1.$$

EXERCICE 3

$$1. F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

2. F et G sont des matrices symétriques réelles de E_n , donc F et G sont diagonalisables.
Donc f et g sont diagonalisables.

- 3.1. $\text{Im}(g) = \text{Vect}(e_2 + e_3 + \cdots + e_n, e_1)$. Donc la famille $(e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(g)$.

De plus les deux vecteurs de cette famille ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

Ainsi $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2 + e_3 + \cdots + e_n)$ est une base de $\text{Im}(g)$.

Alors $\text{rg}(g) = 2$.

Et $\forall i \in \llbracket 3, n \rrbracket$, $e_2 - e_i \in \text{Ker}(g)$. Donc la famille $(e_2 - e_i)_{3 \leq i \leq n}$ est une famille échelonnée de vecteurs de $\text{Ker}(g)$ donc une famille libre de $\text{Ker}(g)$.

Et d'après le théorème du rang $\dim \text{Ker}(g) = n - 2$. La famille $(e_2 - e_i)_{3 \leq i \leq n}$ est composée de $n - 2$ vecteurs.

Donc $\mathcal{B}_2$ est une base de $\text{Ker}(g)$.

- 3.2. Comme la matrice g dans la base canonique qui est une base orthonormée est symétrique, donc g est un endomorphisme symétrique.

Soit $x \in \text{Ker}(g)$ et $y \in \text{Im}(g)$. Alors il existe un vecteur z de E_n tel que $y = g(z)$. Notons $\langle, \rangle$ le produit scalaire canonique.

Alors $\langle x, y \rangle = \langle x, g(z) \rangle = \langle g(x), y \rangle$ car g est un endomorphisme symétrique.

Or $x \in \text{Ker}(g)$. Donc $\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi les espaces vectoriels $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont orthogonaux.

Or d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(g) + \dim \text{Im}(g) = \dim E_n$.

Donc $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n .

- 3.3. 0 est une valeur propre de g et la dimension du sous-espace propre associé est $n - 2$ c'est-à-dire la dimension de $\text{Ker}(g)$.

Or g est diagonalisable. Donc g admet deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 .

Or $\text{tr}(g) = \text{tr}(G) = 0$. Alors $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Ainsi $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

- 3.4.1.(i) $\diamond$ Soit $y \in \text{Im}(g)$. Alors $g(y) \in \text{Im}(g)$. Donc $\text{Im}(g)$ est stable par g .

$\diamond$ Soit $x \in \text{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}(g)$. Donc $\text{Ker}(g)$ est stable par g .

- 3.4.1.(ii) Rappelons que $g(e_1) = \sum_{i=2}^n e_i$ et $g\left(\sum_{i=2}^n e_i\right) = (n - 1)e_1$.

$$\text{Donc } H = \begin{pmatrix} 0 & n - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3.4.1.(iii) Le polynôme caractéristique de h est $\chi_h(X) = X^2 - (n - 1)$.

Donc $\mathbf{Sp}(h) = \{-\sqrt{n - 1}, \sqrt{n - 1}\}$.

Et comme $-\sqrt{n - 1} \neq \sqrt{n - 1}$ ($n > 1$), alors les sous-espaces propres de h sont de dimension 1.

Remarquons que $H - \sqrt{n - 1}I_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{n - 1} & n - 1 \\ 1 & -\sqrt{n - 1} \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} \sqrt{n - 1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\text{Ker}(H - \sqrt{n - 1}I_2)$.

De même $H + \sqrt{n - 1}I_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{n - 1} & n - 1 \\ 1 & \sqrt{n - 1} \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} -\sqrt{n - 1} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\text{Ker}(H + \sqrt{n - 1}I_2)$.

$$\sqrt{n-1}I_2).$$

$$\text{Ainsi } E_h(-\sqrt{n-1}) = \text{Vect}(\sqrt{n-1} e_1 + \sum_{i=2}^n e_i) \text{ et } E_h(\sqrt{n-1}) = \text{Vect}(-\sqrt{n-1} e_1 + \sum_{i=2}^n e_i)$$

3.4.1.(iv) Les valeurs propres de h sont aussi des valeurs propres de g . Donc $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.4.2.(i) $\diamond$ Soit λ une valeur propre de g et x un vecteur propre associé.

$$\text{Alors } g(x) = \lambda x.$$

$$\text{Donc } g^2(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = \lambda^2 x.$$

Or x est non nul, donc λ^2 est une valeur propre de g^2 .

$$\text{Donc } \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\} \subset \mathbf{Sp}(g^2)$$

$\diamond$ Et tout vecteur propre de λ pour g est aussi un vecteur propre de λ^2 pour g^2 .

$$\text{Donc } E_g(0) \subset E_{g^2}(0), E_g(\lambda_1) \subset E_{g^2}(\lambda_1^2) \text{ et } E_g(\lambda_2) \subset E_{g^2}(\lambda_2^2).$$

Or g est diagonalisable. Donc $E_g(0) \oplus E_g(\lambda_1) \oplus E_g(\lambda_2) = E_n$.

$$\text{Alors } E_{g^2}(0) + E_{g^2}(\lambda_1^2) + E_{g^2}(\lambda_2^2) = E_n. \text{ Donc } \mathbf{Sp}(g^2) \subset \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}.$$

$$\text{Ainsi } \mathbf{Sp}(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}.$$

3.4.2.(ii) La matrice de g^2 dans la base $\mathcal{B}$ est $G^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

3.4.2.(iii) Comme $E_g(\lambda_1) \oplus E_g(\lambda_2) = E_{g^2}(\lambda_1^2) + E_{g^2}(\lambda_2^2)$, donc $\dim(E_{g^2}(\lambda_1^2) + E_{g^2}(\lambda_2^2)) = 2$.

En regardant la trace de g^2 indépendante de la base choisie : $2(n-1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

3.4.2.(iv) Rappelons que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 > 0$. D'après la question précédente, $2(n-1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$.
Donc $\lambda_1^2 + (-\lambda_1)^2 = 2(n-1)$ ou encore $\lambda_1^2 = n-1$. Ainsi $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

3.5. D'après la question ,

$$E_h(-\sqrt{n-1}) = \text{Vect}\left(\sqrt{n-1} e_1 + \sum_{i=2}^n e_i\right) \text{ et } E_h(\sqrt{n-1}) = \text{Vect}\left(-\sqrt{n-1} e_1 + \sum_{i=2}^n e_i\right)$$

Or les sous-espaces propres de g associés aux valeurs propres $-\sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n-1}$ sont de dimension 1 et contiennent ceux de h associés aux mêmes valeurs propres.

$$\text{Donc } E_g(-\sqrt{n-1}) = \text{Vect}\left(\sqrt{n-1} e_1 + \sum_{i=2}^n e_i\right) \text{ et } E_g(\sqrt{n-1}) = \text{Vect}\left(-\sqrt{n-1} e_1 + \sum_{i=2}^n e_i\right).$$

Rappelons qu'une base de $\ker(g)$ est $\mathcal{B}_1$.

$$\text{Donc en posant } P = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0).$$

3.6. Id_{E_n} est diagonalisable dans toutes les bases de E_n . Donc la matrice de $f = g + \text{Id}_{E_n}$ est diagonale dans une base qui diagonalise g ou encore $F = G + I_n$.

Ainsi $P^{-1}FP$ est diagonale.

4. Posons $Y = P^{-1}X$. Alors par linéarité de $X \mapsto P^{-1}X$, $Y' = P^{-1}X'$.

Donc l'équation différentielle, $\mathcal{S} : X'(t) = FX(t) + tU$ s'écrit $Y'(t) = P^{-1}FPY(t) + tP^{-1}U$

$$\text{ou encore } Y'(t) = DY(t) + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } D = \text{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, 1, \dots, 1).$$

Alors en notant y_i les fonctions coordonnées de Y ,

$$\mathcal{S} \iff \begin{cases} y_1'(t) &= (1 + \sqrt{n-1}) y_1(t) + t & (\mathcal{S}_1) \\ y_2'(t) &= (1 - \sqrt{n-1}) y_2(t) & (\mathcal{S}_2) \\ \forall i \in \llbracket 3, n \rrbracket, y_i'(t) &= y_i(t) & (\mathcal{S}_i) \end{cases}$$

Donc pour tout entier i de $\llbracket 3, n \rrbracket$, y_i est une solution de $\mathcal{S}_i$ si et seulement s'il existe une constante c_i telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_i(t) = c_i e^t$.

Et y_2 est une solution de $\mathcal{S}_2$ si et seulement s'il existe une constante c_2 telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t}$.

Cherchons une solution particulière de $\mathcal{S}_1$ polynomiale de degré 1 de l'équation $y_1'(t) = (1 + \sqrt{n-1})y_1(t) + t$, c'est-à-dire de la forme $at + b$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $a = (1 + \sqrt{n-1})(at + b) + t$. Donc $a = \frac{-1}{1+\sqrt{n-1}}$ et $b = \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2}$.

Par ailleurs les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t}$.

Donc les solutions de $\mathcal{S}_1$ sont exactement les fonctions

$$t \mapsto \frac{-1}{(1 + \sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} \text{ où } c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi } Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} \\ c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} \\ c_3 e^t \\ \vdots \\ c_n e^t \end{pmatrix}.$$

Et les solutions de $\mathcal{S}$ sont les fonctions

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n-1}}{(1+\sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) - \sqrt{n-1} c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} - \sqrt{n-1} c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + \sum_{i=3}^n c_i e^t \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + c_3 e^t \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + c_4 e^t \\ \vdots \\ \frac{-1}{(1+\sqrt{n-1})^2} ((1 + \sqrt{n-1})t + 1) + c_1 e^{(1+\sqrt{n-1})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{n-1})t} + c_n e^t \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4

1.1. La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 = 1$.

Ainsi la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

1.2. La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

De plus $0 \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \leq \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Ainsi $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.

1.3. La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Elle est prolongeable par continuité en 0, donc $\int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ converge.

D'après la question précédente, $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ converge.

Ainsi $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. • Pour tout réel x positif, la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout réel t strictement positif, la fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

• Et $\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$.

Or d'après la question précédente, $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.1.1. Soit t un réel positif.

La fonction $\varphi : u \mapsto \sin(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, t]$ et $\forall u \in [0, t], |\varphi'(u)| \leq 1$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq |t - 0|$.

Ainsi $\forall t \geq 0, 0 \leq |\sin(t)| \leq t$.

2.1.2. Soit t un réel strictement positif.

D'après la question précédente et la croissance de la fonction carrée, $\sin^2(t) \leq t^2$.

Donc $0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} \leq t$ car $(t > 0)$.

Par décroissance de la fonction $u \mapsto e^{-u}$, comme $at \leq xt, e^{-xt} \leq e^{-at}$.

Ainsi par produit des inégalités positives, $\forall t > 0, 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leq te^{-at}$.

Remarque : On aurait pu aussi obtenir l'inégalité suivante $\forall t > 0, 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leq e^{-at}$ plus agréable à manipuler ensuite

2.1.3. Soit t un réel strictement positif.

Rappelons que $\sin^2(t) \leq 1$ et que $e^{-xt} \leq e^{-at}$.

Ainsi par produit des inégalités positives, $\forall t > 0, 0 \leq \sin^2(t) e^{-xt} \leq e^{-at}$.

2.2. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $x > 0, t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (1.4.).

• Pour tout $t > 0, x \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $x > 0, t \mapsto -\frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt}$ et $t \mapsto \sin^2(t) e^{-xt}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

• $\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| -\frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq te^{-at}$.

Et $t \mapsto te^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x . Comme $te^{-at} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto te^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

• $\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, |\sin^2(t) e^{-xt}| \leq e^{-at}$.

Et $t \mapsto e^{-at}$ est continue intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendante de x .

Conclusion. Par théorème, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t) e^{-xt} dt$$

3.1. Soit θ un réel. Soit x et t des réels strictement positifs.

Remarquons que $\theta t \in \mathbb{R}$. Donc $|e^{i\theta t}| = 1$.

Or $|e^{(i\theta-x)t}| = |e^{i\theta t} e^{-xt}| = |e^{i\theta t}| |e^{-xt}| = e^{-xt}$ car $e^{-xt} \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, |e^{(i\theta-x)t}| = e^{-xt}$.

3.2. Soit θ un réel. Soit x un réel strictement positif.

Comme $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-xt} = 0$.

Donc d'après la question précédente, $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{(i\theta-x)t}| = 0$.

3.3. Soit x un réel strictement positif.

Remarquons que $\forall t \in]0, +\infty[, \sin^2(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} - 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f''(x) &= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} (e^{(2i-x)t} + e^{(-2i-x)t} - 2e^{-xt}) dt \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{e^{(2i-x)t}}{2i-x} + \frac{e^{(-2i-x)t}}{-2i-x} + 2\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{-1}{2i-x} + \frac{-1}{-2i-x} + 2\frac{-1}{x} \right) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \frac{-2i-x+2i-x}{(2i-x)(-2i-x)} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

4.1. Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} \leq e^{-xt}$.

Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

Donc $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Ainsi par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.2. Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leq e^{-xt}$.

Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

Donc $0 \leq -f'(x) \leq \frac{1}{x}$. Ainsi par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

4.3. G est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall t \in \mathbb{R}, G'(t) = \ln(t^2 + 4) + \frac{2t^2}{t^2+4} - 2 + 2\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \ln(t^2 + 4) + 2\frac{t^2+4}{t^2+4} - 2$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, G'(t) = \ln(t^2 + 4)$.

4.4. D'après la question 3.3., $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

En intégrant, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 4) + C$.

Or d'après la question 4.2., $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Et $f'(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) + C$. Donc $C = 0$.

En intégrant, il existe une constante c telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1}{2}(x \ln(x) - x) - \frac{1}{4}G(x) + c$.
Donc $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \left(2x \ln(x) - 2x - x \ln(x^2 + 4) + 2x - 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right) + c \\ &= \frac{1}{4} \left(x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right) + c \\ &= \frac{1}{4} \left(x \ln\left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right) - 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right) + c \end{aligned}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ car $x \ln \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{4x}{x^2+4}$.

Or d'après la question 4.1., $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donc $c = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion. $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{1}{4} \left(2x \ln(x) - x \ln(x^2 + 4) - 4 \arctan \left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2}$.

5. On a $f(0) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.

Et par continuité de f en 0 (montrée en 1.4.),

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left(x \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} \right) - 4 \arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad (\text{croissance comparée}). \end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.