Correction du sujet d'analyse

Partie I

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc la fonction $f = \tanh$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Par propriété des fonctions usuelles, f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$.

Donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.
Enfin, grâce à la stricte croissance, $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f \ ; \ \lim\limits_{+\infty} f\right[$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 1$; puis, comme f est impaire, $\lim\limits_{-\infty} f = -1$.

$\boxed{\text{On pose I} =]-1\ ;\ 1[\text{. Donc tanh est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur I.}}$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\tanh)'(x) = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$.

$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R},\ (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x.}$

3. On sait que tanh est une fonction impaire. artanh est définie sur I qui est symétrique par rapport à zéro.
De plus, on a : $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} \tanh(\operatorname{artanh}(-x)) &= -x \\ &= -\tanh(\operatorname{artanh}(x)) \\ &= \tanh(-\operatorname{artanh}(x)) \text{ car tanh est impaire.} \end{aligned}$$

Puis, comme tanh est bijective, on en déduit que : $\forall x \in \mathrm{I}$, $\operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh}(x)$.

$\boxed{\text{Donc la fonction artanh est impaire.}}$

4. artanh est la réciproque de la fonction tanh qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par théorème, on en déduit que <u>artanh est dérivable sur I</u> et que :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ (\operatorname{artanh})'(x) = \frac{1}{(\tanh)'(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh}(x))}.$$

$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathrm{I},\ (\operatorname{artanh})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}.}$

5. La fonction $g : x \longrightarrow \dfrac{1}{1-x^2}$ est continue sur I ; donc $G : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ est définie, continue et dérivable sur I ; c'est **la** primitive de g qui s'annule en zéro. Or $\tanh(0) = 0$ donc $\operatorname{artanh}(0) = 0$.

D'après le **4.**, on a donc : $\forall x \in \mathrm{I}$, $\operatorname{artanh}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$.

Mais : $\forall x \in \mathrm{I}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$. Donc : $\forall x \in \mathrm{I}$, $\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\Big[-\ln|1-t| + \ln|1+t|\Big]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathrm{I},\ \operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).}$

Remarque : On peut aussi obtenir directement artanh, en exprimant x en fonction de tanh (x).

6. La fonction g est de classe C^{∞} sur I donc, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre en zéro.
En particulier, à l'ordre 4, on obtient : $g(x) = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$.
Puis, comme g est continue sur I, artanh, la primitive de g qui s'annule en zéro, admet un développement limité à l'ordre 5 en zéro obtenu en intégrant le développement limité précédent.

D'où, au voisinage de zéro, on a : $\boxed{\operatorname{artanh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)}$.

Partie II

7. Les fonctions u : $x \longrightarrow x$, v : $x \longrightarrow 3$ et w : $x \longrightarrow \dfrac{1}{1-x^2}$ sont continues sur J et u ne s'annule pas sur cet intervalle.
Par théorème, on sait qu'alors (E) admet une infinité de solutions sur J obtenues en additionnant à n'importe quelle solution sur J de l'équation homogène (H) : $x\,y' + 3y = 0$, associée à (E) , une solution particulière de (E) sur J.
Posons : $\forall x \in \mathrm{J}$, $\mathrm{A}(x) = -3\ln(x)$. Par théorème, les solutions de (H) sur J sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = k\,e^{\mathrm{A}(x)} \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \quad y(x) = k\,e^{-3\ln x} = \frac{k}{x^3} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sur J par la méthode de variation de la constante.

On pose : $\forall x \in \mathrm{J}$, $Y(x) = \dfrac{k(x)}{x^3}$ où k est une application dérivable sur J.

On a alors : $\forall x \in \mathrm{J}$, $Y'(x) = -3\dfrac{k(x)}{x^4} + \dfrac{k'(x)}{x^3}$.

Y est solution de (E) ssi

$$\forall x \in \mathrm{J},\ x\,Y'(x) + 3Y(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k'(x)}{x^2} = \frac{1}{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad k'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$$

On choisit : $\forall x \in \mathrm{J}$, $k(x) = -x + \operatorname{artanh}(x)$.

Donc, les solutions de l'équation (E) sur J sont les applications définies par :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{J},\ y(x) = \frac{k + \operatorname{artanh}(x) - x}{x^3} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.}$$

Partie III

8. On cherche une application f vérifiant : $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = k$ et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en zéro.

Donc f est solution du problème posé ssi $k = \dfrac{2k}{1+k^2} \Leftrightarrow k^3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = -1$ ou $k = 1$.

$\boxed{\text{Donc les fonctions constantes solutions du problème posé sont les fonctions égales à } -1,\ 0 \text{ ou } 1.}$

9. Si f est solution du problème posé, en remplaçant x par zéro dans la relation (e) : $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$, on obtient : $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+\left(f(0)\right)^2} \Leftrightarrow$ $\boxed{f(0)\in\{-1,0,1\}}$.

10. Si f est solution du problème posé, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$ (e').

$$\text{(e')} \Rightarrow\ f(x)-1=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)-1-\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}=-\frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)^2}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\leq 0$$

$$\text{et (e')} \Rightarrow\quad f(x)+1=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)+1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}=\frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^2}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\geq 0.$$

Donc : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq f(x)\leq 1.}$

11. Si f est solution du problème posé, $-f$ est encore définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivable en zéro.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R}$, (e) $\Rightarrow -f(2x)=\dfrac{-2f(x)}{1+(f(x))^2}=\dfrac{2\times(-f(x))}{1+(-f(x))^2}$.

$\boxed{\text{Donc, si } f \text{ est solution du problème posé, } -f \text{ l'est aussi.}}$

12. tanh est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivable en zéro.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{2\tanh(x)}{1+(\tanh(x))^2}=\dfrac{2\times\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}=\dfrac{2\times\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2+\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}=\tanh(2x)$.

$\boxed{\text{Donc la fonction tanh est solution du problème posé.}}$

13. $\lim\limits_n \dfrac{x_0}{2^n}=0$ donc, comme f est dérivable en zéro, elle est continue en zéro, donc $\lim\limits_n f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f(0)=1$.

Donc, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite 1.}}$

14. On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=f\left(2\times\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{2f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2}\Rightarrow \boxed{u_n=\dfrac{2u_{n+1}}{1+(u_{n+1})^2}}$.

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_{n+1} a le signe de u_n puisque $1+(u_{n+1})^2>0$. Par une récurrence évidente, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n a le signe de u_0. Donc, la suite (u_n) garde un signe constant.

De plus, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=u_{n+1}-\dfrac{2u_{n+1}}{1+(u_{n+1})^2}=\dfrac{u_{n+1}\times(u_{n+1}^2-1)}{1+(u_{n+1})^2}$.

Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est négative. Or, comme Im f $\subset [-1; 1]$ d'après la question **10.**, $u_n \in [-1; 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, $u_{n+1}^2 - 1 \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc, si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est négative et croissante.
De même, si $u_0 \geq 0$, la suite (u_n) est positive et décroissante.

15. Donc, dans le premier cas, (u_n) converge vers une limite négative ou nulle ce qui est impossible puisque sa limite vaut 1.
Dans la second cas, comme (u_n) est positive et décroissante, elle converge vers une limite $L \leq u_0 = f(x_0) < 1$ car $f(x_0) \in [-1; 1]$, $f(0) = 1$ et $f(x_0) \neq f(0)$; on obtient une nouvelle contradiction.

16. Si f est solution du problème posé avec $f(0) = -1$, alors $-f$ est solution du problème posé avec $-f(0) = 1$, et on tombe encore sur une contradiction.

17. Donc, si f est solution du problème posé avec $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$, alors f est constante.

18. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

Comme à la question **13.**, on montre que la suite (u_n) est convergente de limite $f(0) = 0$.

On a : $u_0 = f(x_0) = 1$; comme $u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1+(u_{n+1})^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n = 1$, on obtient $(u_{n+1})^2 + 1 - 2u_{n+1} = 0$ soit $u_{n+1} = 1$; donc, par récurrence, la suite (u_n) est constante égale à 1 donc convergente de limite 1.
On obtient donc une contradiction.
Donc, si f est solution du problème posé avec $f(0) = 0$, $f(x) \neq 1$, pour tout réel x.
En raisonnant sur $-f$, on en déduit que si f est solution du problème posé avec $f(0) = 0$, $f(x) \neq -1$, pour tout réel x. Donc, d'après la question **10.**, on a finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1.}$

19. Comme tanh est solution du problème posé, on a :

$\forall x \in [-1; 1]$, $\tanh(2\,\mathrm{artanh}(x)) = \dfrac{2\tanh(\mathrm{artanh}(x))}{1+(\tanh(\mathrm{artanh}(x)))^2} = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh(g(2x)) = f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \tanh(2\,\mathrm{artanh}(f(x))) = \tanh(2g(x))$.

Comme tanh est bijective, on en déduit que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2g(x).}$

20. f est dérivable en zéro, $f(0) = 0$ et artanh est dérivable en zéro.
Par composition, $\boxed{g \text{ est dérivable en zéro.}}$

21. On a : $\lim_{n} \dfrac{x}{2^n} = 0$ et g est dérivable en zéro. De plus, $g(0) = 0$.

Donc $v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\dfrac{x}{2^n} - 0}$; on reconnaît un taux d'accroissement.

Donc, (v_n) est convergente de limite $g'(0)$.

22. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{\dfrac{x}{2^{n+1}}} = 2 \times \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{\dfrac{x}{2^{n}}} = \dfrac{g\left(2 \times \dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{\dfrac{x}{2^{n}}} = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^{n}}\right)}{\dfrac{x}{2^{n}}} = v_n$.

Donc (v_n) est une suite constante égale à $v_0 = \dfrac{g(x)}{x}$ qui est, par là même, sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = g'(0) \times x = \lambda \times x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, comme $g(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda \times x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'où $\boxed{g \text{ est linéaire.}}$

23.

D'après l'étude précédente, si f est solution du problème posé, f est, soit constante égale à – 1 ou 1, soit une application de la forme $f(x) = \tanh(\lambda x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh(\lambda x)$ où λ parcourt $\mathbb{R}$, alors f est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivable en zéro.

De plus, comme tanh est solution du problème posé (cf **12.**), on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1 + (\tanh(x))^2} \quad \Rightarrow \quad \forall x, \lambda \in \mathbb{R}$, $\tanh(\lambda \times 2x) = \dfrac{2\tanh(\lambda x)}{1 + (\tanh(\lambda x))^2}$.

Donc, f est bien solution du problème posé.

Les fonctions solutions du problème posé sont donc les fonctions constantes égales à –1 ou 1 et les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh(\lambda x)$ où λ parcourt $\mathbb{R}$.