

Concours ÉNS

Filière MPI

Première composition de mathématiques

25 mai 2008

1 Premiers calculs

1.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de f . Il existe un vecteur $x \in E$, non nul, tel que $f(x) = \lambda x$. Puisque $\|x\| \neq 0$, on peut former le vecteur $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$, qui vérifie $f(x_0) = \lambda x_0$ et $\|x_0\| = 1$. De fait, $\langle x_0 | f(x_0) \rangle$ appartient à $\mathcal{H}(f)$ par définition de cet ensemble. Mais

$$\langle x_0 | f(x_0) \rangle = \langle x_0 | \lambda x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|^2 = \lambda$$

Par suite,

Toute valeur propre de f appartient à $\mathcal{H}(f)$.

1.2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On a successivement

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathcal{H}(\lambda f + \mu \text{Id}) &\iff \exists x \in E \quad (\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad z_0 = \langle x | \lambda f(x) + \mu x \rangle) \\ &\iff \exists x \in E \quad (\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad z_0 = \lambda \langle x | f(x) \rangle + \underbrace{\mu \|x\|}_{=1}) \end{aligned}$$

$$z_0 \in \mathcal{H}(\lambda f + \mu \text{Id}) \iff \exists z \in \mathcal{H}(f) \quad z_0 = \lambda z + \mu$$

Ainsi,

$\mathcal{H}(\lambda f + \mu \text{Id}) = \{\lambda z + \mu \mid z \in \mathcal{H}(f)\}$

1.3. Implicitement, on travaille dans la base orthonormée fixée par l'énoncé et on identifie tout vecteur de E au vecteur de $\mathbb{C}^2$ formé de ses coordonnées. Notre base de référence étant orthonormée, le produit scalaire se calcule dans $\mathbb{C}^2$ par les formules usuelles.

La sphère unité de $\mathbb{C}^2$ est formée des vecteurs ${}^t[a \quad b]$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Ou encore, des vecteurs de la forme ${}^t[\varepsilon_1 \cos \theta \quad \varepsilon_2 \sin \theta]$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ complexes de module 1.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on a successivement

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathcal{H}(f) &\iff \exists \theta \in [0; 2\pi[\quad \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{U} \quad z_0 = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_1} \cos \theta \\ \overline{\varepsilon_2} \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \cos \theta \\ \varepsilon_2 \sin \theta \end{bmatrix} \right) \\ &\iff \exists \theta \in [0; 2\pi[\quad \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{U} \quad z_0 = \cos^2 \theta \\ z_0 \in \mathcal{H}(f) &\iff \exists \theta \in [0; 2\pi[\quad z_0 = \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = [0; 1]}$$

1.4. On se donne $z_0 \in \mathbb{C}$. De la même manière que précédemment, on trouve que

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathcal{H}(f) &\iff \exists \theta \in [0; 2\pi[\quad \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{U} \quad z_0 = \overline{\varepsilon_1} \varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta = \overline{\varepsilon_1} \varepsilon_2 \frac{\sin 2\theta}{2} \\ &\iff \exists \theta \in [0; 2\pi[\quad \exists \varepsilon \in \mathbb{U} \quad z_0 = \frac{\sin \theta}{2} \varepsilon \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2} \right\}}$$

1.5. On suppose E de dimension finie et on note $\mathcal{S}_E$ sa sphère unité. Cet ensemble est compact puisque fermé et borné en dimension finie. On définit alors

$$\forall z \in E \quad q(z) = \langle z \mid f(z) \rangle$$

Après développement du produit scalaire,

$$\forall h \in E \quad q(z+h) = q(z) + \langle h \mid f(z) \rangle + \langle z \mid f(h) \rangle + \langle h \mid f(h) \rangle$$

$$\text{d'où} \quad \forall h \in E \quad |q(z+h) - q(z)| \leq \underbrace{|\langle h \mid f(z) \rangle|}_{\leq \|f(z)\| \|h\|} + \underbrace{|\langle z \mid f(h) \rangle|}_{\leq \|f\| \|z\| \|h\|} + \underbrace{|\langle h \mid f(h) \rangle|}_{\leq \|f\| \|h\|^2}$$

ce qui montre que q est continue sur E . En outre, $\mathcal{H}(f) = q(\mathcal{S}(E))$ donc

$$\boxed{\mathcal{H}(f) \text{ est compact.}}$$

1.6. Soit $z \in E$ de norme 1. Par définition de f ,

$$\langle z \mid f(z) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} z_{n+1}$$

Comme $z \neq 0$, l'ensemble d'entiers $A = \{p \in \mathbb{N} \mid z_p \neq 0\}$ n'est pas vide. Il admet un plus petit élément noté p_0 , qui est l'indice du premier terme non nul de la suite z . De sorte que

$$\langle z \mid f(z) \rangle = \sum_{n=p_0}^{\infty} \overline{z_n} z_{n+1}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors

$$\left| \langle z | f(z) \rangle \right|^2 \leq \underbrace{\sum_{n=p_0}^{\infty} |z_n|^2}_{=\|z\|^2=1} \times \underbrace{\sum_{n=p_0}^{\infty} |z_{n+1}|^2}_{=1-|z_{p_0}|^2} = 1 - |z_{p_0}|^2 < 1$$

Ainsi, $\forall z \in E \quad (\|z\| = 1 \implies |\langle z | f(z) \rangle| < 1)$

ce qui montre que $\mathcal{H}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$

Pour l'inclusion réciproque, il suffit de remarquer que tout complexe λ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de f . La question 1.1 montrera alors que $\lambda \in \mathcal{H}(f)$. On considère la suite z définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad z_n = \lambda^n$$

Le fait que $|\lambda| < 1$ assure que $\sum |z_n|^2$ converge donc $z \in E$. Et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(z)_n = z_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda z_n$$

donc $f(z) = \lambda z$

et λ est bien valeur propre de f . Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}}$$

2 Réduction de certains endomorphismes

2.1. On suppose que f est normal ; on se donne un vecteur propre v de f , associé à une valeur propre λ de sorte que $f(v) = \lambda v$. On développe alors, à l'aide de la sesquilinearité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \|f^*(v) - \bar{\lambda} v\|^2 &= \langle f^*(v) - \bar{\lambda} v | f^*(v) - \bar{\lambda} v \rangle \\ &= \langle f^*(v) | f^*(v) \rangle - \lambda \langle v | f^*(v) \rangle - \bar{\lambda} \langle f^*(v) | v \rangle + |\lambda|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

Mais par définition de l'adjoint d'un endomorphisme, on a

$$\langle v | f^*(v) \rangle = \langle f(v) | v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

puis $\langle f^*(v) | v \rangle = \overline{\langle v | f^*(v) \rangle} = \lambda \|v\|^2$

et enfin $\begin{aligned} \langle f^*(v) | f^*(v) \rangle &= \langle v | f f^*(v) \rangle = \langle v | f^* f(v) \rangle \\ &= \lambda \langle v | f^*(v) \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2 \end{aligned}$

On réinjecte tout cela dans le calcul de $\|f^*(v) - \bar{\lambda} v\|^2$ pour trouver que cette grandeur est nulle. Par suite, $f^*(v) - \bar{\lambda} v = 0$ ou encore

$$\boxed{v \text{ est vecteur propre de } f^*, \text{ relatif à la valeur propre } \bar{\lambda}.}$$

2.2. Supposons f normal et que v est vecteur propre de f , relatif à la valeur propre λ . On sait que $(\text{Vect } v)^\perp = \{v\}^\perp$ donc il suffit de montrer que $\{v\}^\perp$ est stable par f . Soit $y \in E$, orthogonal à v . Alors, d'après la question précédente,

$$\langle f(y) | v \rangle = \langle y | f^*(v) \rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle y | v \rangle}_{=0} = 0$$

ce qui montre bien que $f(y) \in \{v\}^\perp$. Conclusion :

Si v est un vecteur propre de f , $(\text{Vect } v)^\perp$ est stable par f .

2.3. On montre le résultat par récurrence sur la dimension de E . Évidemment, si $\dim E = 1$, tout endomorphisme est normal et diagonal dans n'importe quel base, donc diagonalisable.

On suppose savoir que tout endomorphisme normal d'un espace hermitien de dimension n est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit E hermitien de dimension $n + 1$, soit f un endomorphisme normal de E . Il admet des valeurs propres puisque son polynôme caractéristique est scindé ; on se donne l'une d'elle notée λ , ainsi qu'un vecteur propre associé v_{n+1} . Quitte à le diviser par sa norme, on suppose que $\|v_{n+1}\| = 1$.

D'après la question précédente, $F = (\text{Vect } v_{n+1})^\perp$ est stable par f , qui induit donc un endomorphisme de cet espace hermitien (pour la restriction du produit scalaire sur E) de dimension n . On le note $\tilde{f}$; commençons par calculer son adjoint. On rappelle que

$$\forall x, y \in E \quad \langle f^*(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

$$\text{donc a fortiori} \quad \forall x, y \in F \quad \langle f^*(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle = \langle x | \tilde{f}(y) \rangle$$

L'adjoint de $\tilde{f}$ étant uniquement défini par la relation

$$\forall x, y \in F \quad \langle \tilde{f}^*(x) | y \rangle = \langle x | \tilde{f}(y) \rangle$$

$$\text{il s'ensuit que} \quad \forall x \in F \quad \tilde{f}^*(x) = f^*(x)$$

$$\text{Par suite,} \quad \forall x \in F \quad \tilde{f}^* \tilde{f}(x) = f^* f(x) = f f^*(x) = \tilde{f} \tilde{f}^*(x)$$

ce qui établit que $\tilde{f}$ est normal. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de F formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$. Ils sont donc également vecteurs propres de f . Et ils sont tous orthogonaux à v_{n+1} puisque $F = \{v_{n+1}\}^\perp$.

Ainsi, $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de f ; c'est une base de E , puisque libre et de cardinal $n + 1$. Ce qui achève de montrer que f est diagonalisable dans une base orthonormée.

Tout endomorphisme normal d'un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormée.

Réciproquement, soit f un endomorphisme d'un espace hermitien E , diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Par définition de l'adjoint de f , on a

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \langle f^*(v_i) | v_j \rangle = \langle v_i | f(v_j) \rangle = \lambda_j \langle v_i | v_j \rangle$$

Mais $\langle v_i | v_j \rangle$ est nul lorsque $i \neq j$ donc on peut remplacer le λ_j par λ_i ci-dessus. D'où

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \langle f^*(v_i) | v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i | v_j \rangle = \langle \overline{\lambda_i} v_i | v_j \rangle$$

Ce qui démontre que $f^*(v_i) = \overline{\lambda_i} v_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Du coup,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f f^*(v_i) = \overline{\lambda_i} f(v_i) = \overline{\lambda_i} \lambda_i v_i = \lambda_i f^*(v_i) = f^*(\lambda_i v_i) = f^* f(v_i)$$

f et f^* commutent sur une base de E , donc ils commutent tout court : f est normal.

Un endomorphisme d'un espace hermitien, diagonalisable dans une base orthonormée, est normal.

2.4 Soit f normal, qu'on diagonalise dans une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. On a montré à la question **2.1** que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f^*(v_i) = \overline{\lambda_i} v_i$$

On a alors successivement :

$$\begin{aligned} \text{Les valeurs propres de } f \text{ sont réelles} &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f^*(v_i) = \lambda_i v_i \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f^*(v_i) = f(v_i) \end{aligned}$$

$$\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont réelles} \iff f^* = f$$

La dernière équivalence provient du fait qu'un endomorphisme de E est entièrement déterminé par l'image d'une base. Ainsi,

Un endomorphisme normal de E est hermitien si, et seulement si, ses valeurs propres sont réelles.

De manière similaire,

$$\begin{aligned} f \text{ est unitaire} &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f f^*(v_i) = v_i \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |\lambda_i|^2 v_i = v_i \\ f \text{ est unitaire} &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |\lambda_i| = 1 \end{aligned}$$

Un endomorphisme normal de E est unitaire si, et seulement si, ses valeurs propres sont de module 1.

2.5 Rappelons d'abord que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , dire que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure équivaut à dire que pour chaque $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(e_i)$ est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_i$ uniquement.

Puisque f a son polynôme caractéristique scindé (théorème de d'Alembert) il est trigonalisable : il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. À l'aide du procédé de Schmidt, on trouve une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de E , telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$$

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Puisque $v_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et dans la mesure où la matrice de f dans $(e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure, $f(v_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, qui n'est autre que $\text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$. Donc la matrice de f est aussi triangulaire supérieure dans la base $(v_1, \dots, v_n)$.

Il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$, orthonormée, dans laquelle f a une matrice triangulaire supérieure.

Si cette matrice est diagonale, la question 2.3 établit que f est normal.

Réciproquement, supposons f normal de sorte que $f^* f = f f^*$. Cherchons à localiser $f^*(v_i)$ pour chaque $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Commençons par supposer $i \geq 2$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1; i-1 \rrbracket \quad \langle f^*(v_i) | v_j \rangle = \langle v_i | f(v_j) \rangle = 0$$

puisque $f(v_j) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})$ et v_i est orthogonal à ces vecteurs. Par suite, $f^*(v_i)$ est orthogonal à $v_1, \dots, v_{i-1}$ et

$$\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket \quad f^*(v_i) \in \text{Vect}(v_i, \dots, v_n)$$

Évidemment, si $i = 1$, il est trivial que $f^*(v_i) \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Ceci montre que la matrice de f^* dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ est triangulaire inférieure.

Montrons que c'est aussi le cas de la matrice de f . On sait que f est diagonalisable donc il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de f . Soit λ_i la valeur propre associée à e_i . On rappelle que, d'après la question 2.1,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f^*(e_i) = \overline{\lambda_i} e_i$$

Si on note P un polynôme interpolateur de Lagrange tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(\overline{\lambda_i}) = \lambda_i$$

on a
$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_i) = \lambda_i e_i = P(\overline{\lambda_i}) e_i = P(f^*)(e_i)$$

$P(f^*)$ et f coïncident sur une base, donc $f = P(f^*)$.

Ceci établit bien que la matrice de f dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ est triangulaire inférieure, puisqu'il s'agit d'un polynôme en la matrice de f^* dans cette même base.

La matrice de f dans $(v_1, \dots, v_n)$ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure : elle est diagonale.

f est normal si, et seulement si, sa matrice dans $(v_1, \dots, v_n)$ est en fait diagonale.

3 Le Hausdorffien en dimension 2

3.1. On suppose f normal. Il existe donc une base orthonormée (e_1, e_2) de E dans laquelle f est diagonalisable. On note λ_1, λ_2 les valeurs propres associées respectivement à $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On note g l'endomorphisme de E tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de sorte que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ et $f = (\lambda_1 - \lambda_2)g + \lambda_2 \text{Id}$

D'après la question 1.3, on sait que $\mathcal{H}(g) = [0; 1]$. Ceci, la relation ci-dessus et la question 1.2 montrent alors que

$$\mathcal{H}(f) = \{(\lambda_1 - \lambda_2)t + \lambda_2 \mid t \in [0; 1]\} = \{\lambda_1 t + (1 - t)\lambda_2 \mid t \in [0; 1]\}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(f) \text{ est le segment reliant } \lambda_1 \text{ à } \lambda_2.}$$

3.2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

On met a et b sous forme trigonométrique en notant a_0 et b_0 leurs modules respectifs :

$$a = a_0 e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = b_0 e^{i\beta}$$

Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ est un vecteur de E de norme 1, on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ donc il existe $\omega \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $|x_1| = \cos \omega$ et $|x_2| = \sin \omega$. En suivant l'indication de l'énoncé, on pose

$$\phi = \arg(x_1) - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{et} \quad \theta = \arg x_2 - \phi$$

de sorte que $x_1 = \cos \omega e^{i(\phi + (\alpha - \beta)/2)}$ et $x_2 = \sin \omega e^{i(\theta + \phi)}$

Évidemment, la donnée de ω , ϕ et θ détermine entièrement un x de norme 1. Donnons immédiatement, avec ces notations, la valeur de $\langle x \mid f(x) \rangle$. Tous calculs faits,

$$\langle z \mid f(z) \rangle = a \overline{x_1} x_2 + b \overline{x_2} x_1 = \frac{\sin 2\omega}{2} e^{i(\alpha + \beta)/2} ((a_0 + b_0) \cos \theta + i(a_0 - b_0) \sin \theta)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= \left\{ \frac{\sin 2\omega}{2} e^{i(\alpha + \beta)/2} ((a_0 + b_0) \cos \theta + i(a_0 - b_0) \sin \theta) \mid \omega \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \theta, \phi \in \mathbb{R} \right\} \\ &= e^{i(\alpha + \beta)/2} \left\{ \frac{\sin 2\omega}{2} ((a_0 + b_0) \cos \theta + i(a_0 - b_0) \sin \theta) \mid \omega \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \theta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

L'exponentielle complexe qui est en facteur fait subir une rotation à l'ensemble auquel elle est multipliée. Pour chaque $\omega \in [0; \frac{\pi}{2}]$ fixé, l'ensemble

$$\mathcal{E}_\omega = \left\{ \frac{\sin 2\omega}{2} ((a_0 + b_0) \cos \theta + i(a_0 - b_0) \sin \theta) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

est l'ellipse de demi grand axe $(a_0 + b_0) \frac{\sin 2\omega}{2}$ sur l'axe réel, et demi petit axe $|a_0 - b_0| \frac{\sin 2\omega}{2}$ sur l'axe imaginaire.

Par suite, $\mathcal{H}(f)$ est la réunion de toutes ces ellipses lorsque ω varie de 0 à $\pi/2$, tournée d'un angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Le sinus variant continument de 0 à 1,

$$\mathcal{H}(f) \text{ est le disque elliptique dont les axes sont de longueurs } |a| + |b| \text{ et } ||a| - |b||, \text{ centré en l'origine, tourné d'un angle } \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

3.3. Supposons que $\text{Tr } f = 0$. La trace de f étant la somme des deux valeurs propres de f , celles-ci sont opposées et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que λ et $-\lambda$ sont les valeurs propres de f .

On distingue les trois cas suggérés par l'énoncé :

- Si f admet une valeur propre double, cela implique que $\lambda = 0$. Auquel cas, on se donne $e_1 \in \text{Ker } f$ non nul, et e_2 orthogonal à e_1 . Quitte à les diviser par leur norme, on suppose que ces vecteurs sont de norme 1. La matrice de f dans la base orthonormée (e_1, e_2) est alors de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Mais comme $\text{Tr } f$ est nul et qu'il s'agit de la trace de toute matrice pouvant représenter f , il s'ensuit que $b = 0$. On a bien une matrice de la forme voulue dans une base orthonormée.

- On suppose que f est normal. Il existe alors une base orthonormée (e_1, e_2) de vecteurs propres de f ; quitte à les échanger, on suppose que $f(e_1) = \lambda e_1$ et $f(e_2) = -\lambda e_2$. On pose alors

$$u_1 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{e_1 - e_2}{2}$$

On vérifie immédiatement que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est orthonormée. De plus,

$$f(u_1) = \frac{\lambda(e_1 - e_2)}{\sqrt{2}} = \lambda u_2 \quad \text{et} \quad f(u_2) = \frac{\lambda(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}} = \lambda u_1$$

d'où
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

qui est bien de la forme voulue.

- Enfin, on suppose qu'on est dans le dernier cas : les deux valeurs propres de f sont simples (donc $\lambda \neq 0$) et f n'est pas normal. f est donc diagonalisable, mais pas dans une base orthonormée : il existe une base (e_1, e_2) de vecteurs propres, satisfaisant $\langle e_1 | e_2 \rangle \neq 0$. Quitte à échanger ces vecteurs, on suppose que

$$f(e_1) = \lambda e_1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = -\lambda e_2$$

Et, quitte à les diviser par leur norme, on suppose qu'ils sont de norme 1. On choisit alors α tel que

$$\alpha^2 = \frac{\langle e_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_2 \rangle} = \frac{\overline{\langle e_1 | e_2 \rangle}}{\langle e_1 | e_2 \rangle}$$

C'est possible puisque tout nombre complexe admet des racines carrées. La deuxième expression de α^2 montre que ce nombre est de module 1, donc $|\alpha| = 1$. De sorte que $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$. On pose ensuite $u = e_1 + \alpha e_2$ et on constate que

$$\begin{aligned} \langle u | f(u) \rangle &= \langle e_1 + \alpha e_2 | \lambda e_1 - \lambda \alpha e_2 \rangle \\ &= \lambda \underbrace{\|e_1\|^2}_{=1} - \lambda \alpha \langle e_1 | e_2 \rangle + \lambda \bar{\alpha} \langle e_2 | e_1 \rangle - \lambda \underbrace{|\alpha|^2 \|e_2\|^2}_{=1} \\ \langle u | f(u) \rangle &= \lambda \left(\frac{\langle e_2 | e_1 \rangle}{\alpha} - \alpha \langle e_1 | e_2 \rangle \right) = \frac{\lambda}{\alpha} \underbrace{(\langle e_2 | e_1 \rangle - \alpha^2 \langle e_1 | e_2 \rangle)}_{=0} \end{aligned}$$

Enfin, on pose $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et on construit une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ de E . La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

Le zéro en haut à gauche provient du fait que $\langle u_1 | f(u_1) \rangle = 0$. Comme f est de trace nulle, il s'ensuit que $c = 0$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est bien de la forme voulue.

3.4. Soit f un endomorphisme de E . On pose

$$g = f - \frac{\text{Tr } f}{2} \text{Id} \quad \text{de sorte que} \quad f = g + \frac{\text{Tr } f}{2} \text{Id}$$

g est de trace nulle ; d'après la question **3.3**, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de g a la forme $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Et d'après la question **3.2**, $\mathcal{H}(g)$ est un disque elliptique.

Mais la question **1.2** établit que

$$\mathcal{H}(f) = \left\{ z + \frac{\text{Tr } f}{2} \mid z \in \mathcal{H}(g) \right\}$$

$\mathcal{H}(f)$ est donc le translaté de $\mathcal{H}(g)$ par le vecteur d'affixe $\frac{\text{Tr } f}{2}$.

$\mathcal{H}(f)$ est un disque elliptique.

On note $\varepsilon = \frac{\text{Tr} f}{2}$. Remarquons que

$$f f^* = (g + \varepsilon \text{Id})(g^* + \bar{\varepsilon} \text{Id}) = g g^* + \varepsilon g^* + \bar{\varepsilon} g + |\varepsilon|^2 \text{Id}$$

tandis que

$$\begin{aligned} f^* f &= (g^* + \bar{\varepsilon} \text{Id})(g + \varepsilon \text{Id}) = g^* g + \underbrace{\varepsilon g^* + \bar{\varepsilon} g + |\varepsilon|^2 \text{Id}}_{= f f^* - g g^*} \\ &= f f^* + g^* g - g g^* \end{aligned}$$

Ce qui établit que f est normal si, et seulement si, g est normal.

Ensuite, on observe que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g g^*) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{b} \\ \bar{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{bmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g^* g) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{b} \\ \bar{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 \end{bmatrix}$$

Ce qui montre que g est normal si, et seulement si, $|a| = |b|$.

Enfin, la question 3.2 donne en fait plus de précisions sur $\mathcal{H}(g)$: c'est un disque elliptique dont les axes sont de longueurs $|a| + |b|$ et $||a| - |b||$, dégénéré si, et seulement si, $|a| = |b|$.

Conclusion : f est normal si, et seulement si, $\mathcal{H}(f)$ est dégénéré.

Enfin, $\mathcal{H}(f)$ est un vrai disque $\iff$ ses axes sont de même longueur

$$\begin{aligned} &\iff |a| + |b| = ||a| - |b|| \iff (|a| + |b|)^2 = (|a| - |b|)^2 \\ &\iff |a| |b| = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(f) \text{ est un vrai disque} \iff \chi_g = X^2 \iff \chi_f = \left(X - \frac{\text{Tr} f}{2}\right)^2$$

$\mathcal{H}(f)$ est un vrai disque si, et seulement si, f admet une valeur propre double.

3.5. On reprend les notations des questions précédentes : $f = g + \varepsilon \text{Id}$ avec $\varepsilon = \frac{\text{Tr} f}{2}$ et g admet, dans une base orthonormée, pour matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a = |a| e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad b = |b| e^{i\beta}$$

On sait (question 3.2) que $\mathcal{H}(g)$ est l'image par la rotation d'angle $\frac{\alpha+\beta}{2}$ du disque elliptique dont la frontière est l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne

$$\frac{4x^2}{(|a| + |b|)^2} + \frac{4y^2}{(|a| - |b|)^2} = 1$$

Les foyers de $\mathcal{C}$ ont pour affixes c et $-c$, avec

$$c^2 = \left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|a|-|b|}{2}\right)^2 = |ab|$$

Les foyers de la frontière de $\mathcal{H}(g)$ sont donc les points d'affixes

$$\omega_1 = \sqrt{|a||b|} e^{i(\alpha+\beta)/2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\sqrt{|a||b|} e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

C'est-à-dire que ω_1 et ω_2 sont les deux racines carrées de ab . Dans la mesure où le polynôme caractéristique de g est $X^2 - ab$, les foyers de $\mathcal{H}(g)$ sont les valeurs propres de g .

Enfin, on sait (question 3.4) que $\mathcal{H}(f)$ est le translaté de $\mathcal{H}(g)$ par le vecteur d'affixe ε . Les foyers de $\mathcal{H}(f)$ sont alors $\omega_1 + \varepsilon$ et $\omega_2 + \varepsilon$. Mais puisque $f = g + \varepsilon \text{Id}$, on a

$$\chi_f = \det(f - X\text{Id}) = \det(g - (X - \varepsilon)\text{Id}) = \chi_g(X - \varepsilon) = (X - \varepsilon - \omega_1)(X - \varepsilon - \omega_2)$$

Les valeurs propres de f sont donc $\omega_1 + \varepsilon$ et $\omega_2 + \varepsilon$.

Les foyers de $\mathcal{H}(f)$ sont les valeurs propres de f .

4 Hausdorffien et convexité

4.1 On commence par montrer que π_F est hermitien. Si x et y sont dans E , on les décompose suivant la somme directe $F \oplus F^\perp$:

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2$$

Ainsi,
$$\pi_F(x) = x_1 \quad \pi_F(y) = y_1$$

Du coup,
$$\langle \pi_F(x) | y \rangle = \langle x_1 | y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle$$

puisque $x_1 \perp y_2$. De la même manière, on montre que $\langle x | \pi_F(y) \rangle = \langle x_1 | y_1 \rangle$. D'où

$$\forall x, y \in E \quad \langle \pi_F(x) | y \rangle = \langle x | \pi_F(y) \rangle$$

Répondons maintenant à la question posée. Soit $\lambda \in \mathcal{H}(\pi_f \circ f|_F)$. Il existe $z \in F$ de norme 1 tel que

$$\lambda = \langle z | \pi_F f(z) \rangle = \langle \pi_F(z) | f(z) \rangle = \langle z | f(z) \rangle \in \mathcal{H}(f)$$

$$\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F) \subset \mathcal{H}(f)$$

4.2 Soient λ_1 et λ_2 dans $\mathcal{H}(f)$. Il existe des vecteurs z_1, z_2 dans E , de norme 1, tels que

$$\lambda_1 = \langle z_1 | f(z_1) \rangle \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \langle z_2 | f(z_2) \rangle$$

Supposons d'abord que $\dim E \geq 2$. On note F un sous-espace de E , de dimension 2, contenant z_1 et z_2 . Les résultats de la partie 3 montrent que $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$ est un disque elliptique, donc convexe. Puisqu'il contient λ_1 et λ_2 , il contient le segment reliant ces deux points du plan complexe. Enfin, d'après la question 4.1, ce segment est aussi contenu dans $\mathcal{H}(f)$.

Si $\dim E = 1$, alors z_1 et z_2 sont proportionnels. Et comme ils ont tous deux norme 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 = e^{i\theta} z_1$. Du coup,

$$\lambda_2 = \langle e^{i\theta} z_1 \mid f(e^{i\theta} z_1) \rangle = e^{-i\theta} e^{i\theta} \langle z_1 \mid f(z_1) \rangle = \lambda_1$$

Dans ce cas, $\mathcal{H}(f)$ est réduit à un point. Il est évidemment convexe.

$$\boxed{\mathcal{H}(f) \text{ est convexe.}}$$

4.3 On démontre quelque chose de plus fort que ce qui est demandé, car cela ne coûte pas plus cher et rend la suite de la question moins technique.

Soient $E_1, \dots, E_p$, sous-espaces de E deux-à-deux orthogonaux, tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$. Soient $f_1, \dots, f_p$ des endomorphismes de $E_1, \dots, E_p$ respectivement. Si $x \in E$ se décompose comme

$$x = x_1 + \dots + x_p \quad \text{avec} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad x_i \in E_i$$

on pose

$$f(x) = f_1(x_1) + \dots + f_p(x_p)$$

On va montrer que $\mathcal{H}(f) = \text{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(f_p))$. Évidemment, le cas $p = 2$ répond à la question posée.

Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et $\lambda \in \mathcal{H}(f_i)$. Il existe $z \in E_i$ de norme 1 tel que $\lambda = \langle z \mid f_i(z) \rangle$. Mais par définition de f , on a $f(z) = f_i(z)$ donc λ se trouve aussi dans $\mathcal{H}(f)$. Ce qui montre que

$$\mathcal{H}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(f_p) \subset \mathcal{H}(f)$$

Par suite, $\mathcal{H}(f)$ doit aussi contenir toute combinaison convexe d'éléments de l'ensemble $\mathcal{H}(f_1) \cup \dots \mathcal{H}(f_p)$, puisqu'il est lui-même convexe d'après la question 4.2. Ce qui montre la première inclusion

$$\text{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(f_p)) \subset \mathcal{H}(f)$$

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathcal{H}(f)$ et $z \in E$, de norme 1, tel que $\lambda = \langle z \mid f(z) \rangle$. Dans la mesure où $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$, on décompose z suivant cette somme directe de sorte que

$$z = z_1 + \dots + z_p \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad z_i \in E_i$$

Par définition de f , on a

$$\begin{aligned} \lambda &= \langle z_1 + \dots + z_p \mid f_1(z_1) + \dots + f_p(z_p) \rangle \\ &= \langle z_1 \mid f_1(z_1) \rangle + \dots + \langle z_p \mid f_p(z_p) \rangle \end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que les $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont deux-à-deux orthogonaux et que chaque E_i est stable par f_i . On pose alors

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \lambda_i = \left\langle \frac{z_i}{\|z_i\|} \mid f\left(\frac{z_i}{\|z_i\|}\right) \right\rangle \in \mathcal{H}(f_i) \quad \text{si} \quad z_i \neq 0$$

on a

$$\lambda = \sum_{\substack{i=0 \\ z_i \neq 0}}^p \|z_i\|^2 \lambda_i$$

Mais
$$\sum_{\substack{i=0 \\ z_i \neq 0}}^p \|z_i\|^2 = \sum_{i=0}^p \|z_i\|^2 = \|z\|^2 = 1$$

d'après la relation de Pythagore. Donc λ est bien combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{H}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(f_p)$.

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \text{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{H}(f_p))}$$

Une remarque : au cours de la question 4.2, on a montré que si E est de dimension 1, $\mathcal{H}(f)$ est réduit à un point. Dans la mesure où f est alors une homothétie, il est immédiat que ce point est le rapport de l'homothétie, c'est-à-dire l'unique valeur propre de f . Ainsi, en dimension 1, $\mathcal{H}(f)$ est bien l'enveloppe convexe des valeurs propres de f .

On suppose maintenant f normal et E de dimension finie d . Il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$ de E formée de vecteurs propres de f . On note λ_i la valeur propre associée à chaque e_i . En posant

$$\forall i \in [1; d] \quad E_i = \text{Vect}(e_i)$$

E est somme directe orthogonale de $E_1, \dots, E_d$. De plus, f agit comme l'homothétie de rapport λ_i sur chaque E_i . D'après le résultat établi en début de question,

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \text{Conv}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\})}$$

On a vu à la question 1.4 un exemple d'endomorphisme f d'un espace hermitien de dimension 2, non normal, dont le Hausdorffien est un disque de rayon $1/2$. Un tel disque, non dégénéré, n'est certainement pas l'enveloppe convexe des deux valeurs propres de f : cette dernière est le segment qui les relie.

4.4 Le résultat est évident si le convexe polygonal $\mathcal{C}$ n'est l'enveloppe convexe que d'un point : $\mathcal{C}$ est alors un singleton et $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ implique que $\mathcal{E}$ est un point donc est dégénéré.

On suppose donc que $\mathcal{C} = \text{Conv}(s, v_1, \dots, v_n)$ avec $n \geq 1$ et que $\mathcal{E}$ est un disque elliptique non dégénéré contenu dans $\mathcal{C}$, tel que $s \in \mathcal{E}$. Commençons par observer que s ne peut être intérieur à $\mathcal{E}$: s'il l'est, il y a une boule $\mathcal{B}(s, 2\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ contenue dans $\mathcal{E}$, donc contenue dans $\mathcal{C}$. Et s se trouve au milieu du segment reliant $s - \varepsilon \vec{t}$ et $s + \varepsilon \vec{t}$ ce qui contredit le fait que s est un sommet.

s est donc sur la frontière de $\mathcal{E}$. Quitte à procéder à un changement de repère affine, on peut supposer que s est l'origine du repère et que la tangente à $\mathcal{E}$ en s est horizontale.

Pour tout entier $k \neq 0$, on note $\mathcal{D}_k$ la demi-droite d'équation $y = x/k$, $x > 0$. Cette droite n'est pas tangente à $\mathcal{E}$ puisqu'elle n'est pas horizontale. Donc elle intersecte $\mathcal{E}$ en au moins un point qu'on note a_k . Bien sur, $a_k \neq 0$ puisque 0 ne se trouve pas sur la demi-droite $\mathcal{D}_k$. Et a_k est combinaison convexe de $0, v_1, \dots, v_n$: il existe $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0; 1]$, dont la somme vaut 1 et tels que

$$a_k = \sum_{p=1}^n \alpha_p v_p$$

On observe qu'il est exclu que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient tous nuls, puisque cela impliquerait que a_k est nul aussi. Du coup, en posant

$$b_k = \sum_{p=1}^n \frac{\alpha_p}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} v_p$$

on voit que b_k appartient à l'enveloppe convexe de $v_1, \dots, v_p$. Comme b_k est proportionnel à a_k , il est sur la demi-droite $\mathcal{D}_k$. Notant x_k et y_k ses coordonnées, on a $y_k = x_k/k$ et $x_k > 0$.

Il est aisé de voir de $\text{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ est fermé et borné : c'est bourré d'inégalités larges et de combinaisons linéaires à coefficients bornés par 1 de $v_1, \dots, v_n$. Cet ensemble est donc compact ; on peut extraire de $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(b_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$, convergente de limite $b = (x, y) \in \text{Conv}(v_1, \dots, v_n)$. Dans la mesure où $s = 0$ est un sommet de $\mathcal{C}$, il est exclu qu'il soit dans $\text{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ donc $b \neq 0$. On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad y_{\varphi(k)} = \frac{x_{\varphi(k)}}{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

D'où $b = (x, 0) \in \text{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ avec $x > 0$

De la même manière, on trouve $b' = (x', 0) \in \text{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ avec $x' < 0$, en utilisant les demi-droites d'équations $y = x/k, x < 0$.

Mais alors $s = 0$ se trouve sur le segment $[b'; b]$, ce qui contredit le fait qu'il s'agisse d'un sommet. Ouf ! On a donc montré que

$\mathcal{C}$ est dégénéré.

4.5.1. Observons d'une part que

$$\lambda = \langle x | f(x) \rangle = \langle \pi_F(x) | f(x) \rangle = \langle x | \pi_F f(x) \rangle$$

donc $\lambda \in \mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$. Puisque F est de dimension 2 et que $\pi_F \circ f|_F$ en est un endomorphisme, on sait d'après la partie 3 que son Hausdorffien est un disque elliptique. Comme il contient λ , sommet d'un convexe polygonal, il est dégénéré. La question 3.4 établit alors que $\pi_F \circ f|_F$ est normal ; son Hausdorffien est un segment (question 3.1) dont les extrémités sont ses valeurs propres. Par suite, λ est une valeur propre de $\pi_F \circ f|_F$.

Décomposons $\pi_F \circ f|_F(x)$ dans la base (x, y) :

$$\pi_F f|_F(x) = ax + by$$

Alors $\lambda = \langle x | \pi_F f(x) \rangle = a \|x\|^2 = a$

Dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (x, y)$, la matrice de f est donc de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi_F f|_F) = \begin{bmatrix} \lambda & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{et par suite} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}((\pi_F f|_F)^*) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{bmatrix}$$

On en déduit $\chi_{\pi_F f|_F} = \det(\pi_F f|_F - X \text{Id}) = X^2 - (\lambda + d)X + \lambda d - bc$

Du coup,

$$\chi_{\pi_F f|_F}(\lambda) = 0 = -bc$$

d'où l'on déduit que $b = 0$ ou $c = 0$.

Dans le premier cas, c'est que $\pi_F f|_F(x) = \lambda x$ et x est vecteur propre de $\pi_F \circ f|_F$ de valeur propre λ .

Dans le cas où $c = 0$, on calcule alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi_F f|_F (\pi_F f|_F)^*) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & \bar{b} \\ 0 & \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda|^2 & \lambda \bar{b} \\ b \bar{\lambda} & |b|^2 + |d|^2 \end{bmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((\pi_F f|_F)^* \pi_F f|_F) = \begin{bmatrix} |\lambda|^2 + |b|^2 & d \bar{b} \\ b \bar{d} & |d|^2 \end{bmatrix}$$

Puisque f est normal, ces matrices sont égales ; l'égalité des coefficients en haut à gauche montre en particulier que $|b|^2 = 0$ donc $b = 0$. Du coup, x est vecteur propre de $\pi_F f|_F$, de valeur propre λ .

$\pi_F \circ f|_F$ est normal et x en est vecteur propre, de valeur propre λ .

4.5.2. La question précédente montre que, si $y \in \{x\}^\perp$, $f(x)$ n'a aucune composante suivant y et que la composante suivant x est λ . Autrement dit, $f(x)$ est orthogonal à $\{x\}^\perp$. Donc $f(x)$ est proportionnel à x . Ce rapport de proportionnalité ne peut être que λ .

x est vecteur propre de f relatif à λ .

4.6. Implicitement, on se place dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ dans laquelle la matrice de f est celle donnée par l'énoncé. On identifiera donc vecteurs de E et $\mathbb{C}^5$. On vérifie par un simple analyse matricielle que f n'est pas normal :

$$\text{Mat}(f) \times \text{Mat}(f^*) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \epsilon^2 & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}(f^*) \times \text{Mat}(f) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \epsilon^2 & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Un calcul de déterminant donne ensuite le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f = -X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$$

dont les racines sont 0, 1, j et j^2 . Leur enveloppe convexe est donc toute la surface du triangle équilatéral de sommets 1, j et j^2 .

Pour déterminer $\mathcal{H}(f)$, il est plus facile d'utiliser la question **4.3**, en essayant de décomposer l'espace astucieusement. Une belle décomposition s'impose presque ; on note

$$E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \quad E_2 = \text{Vect}(e_4, e_5)$$

de sorte que E_1 et E_2 sont orthogonaux. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de E_1 et E_2 respectivement, de matrices dans les bases données ci-dessus

$$\text{Mat}(f_1) = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}(f_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \end{bmatrix}$$

Ceux-ci permettent bien de recomposer f .

$\mathcal{H}(f_2)$ peut être déterminé à l'aide des questions 1.2 et 1.4 : il s'agit du disque centré en l'origine, de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $\mathcal{H}(f_1)$, on remarque que f_1 est normal à l'aide des calculs de produits matriciels faits en début de question. Ou bien il saute aux yeux que $f_1^2 = f_1^*$. Quoi qu'il en soit, la question 4.3 établit que $\mathcal{H}(f_1)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f_1 , qu'on calcule aisément comme étant 1, j et j^2 . $\mathcal{H}(f_1)$ est le triangle équilatéral de sommets 1, j et j^2 . Celui-ci contient le disque $\mathcal{H}(f_2)$ puisque son cercle inscrit est centré en 0, de rayon $\frac{1}{2}$ tandis que $\mathcal{H}(f_2)$ est centré en 0, de rayon $\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}$. D'où

$$\mathcal{H}(f) = \text{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \mathcal{H}(f_2)) = \text{Conv}(\mathcal{H}(f_1)) = \text{Conv}(\{1, j, j^2\})$$

$\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f mais f n'est pas normal.

4.7. Si $\dim E = 1$, tout endomorphisme f est normal (c'est une homothétie) et on a vu que son Hausdorffien est précisément le rapport d'homothétie de f .

Supposons que $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f . On se place dans le cas où E est de dimension $d \geq 2$. On commence par établir que, si f n'est pas diagonalisable, il existe un plan F tel que $\pi_F \circ f|_F$ n'est pas diagonalisable.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f , de sorte que

$$\chi_f = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_p)^{n_p} \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad n_i \geq 1$$

Dans la mesure où $\chi_f(f) = 0$ et d'après le lemme de décomposition des noyaux,

$$E = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id})^{n_p}$$

de sorte que $\dim E = \dim \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})^{n_1} + \cdots + \dim \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id})^{n_p}$

Du coup, si pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on a $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}) = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^2$, le lemme des noyaux itérés implique

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \dim \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}) = \dim \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$$

d'où $\dim E = \dim \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) + \cdots + \dim \text{Ker}(f - \lambda_p \text{Id})$

ce qui prouve que f est diagonalisable, puisque la somme des sous-espaces propres est égale à la dimension de E .

Par contraposée, si l'on suppose f non diagonalisable, il existe une valeur propre λ telle que $\{0\} \subsetneq \text{Ker}(f - \lambda) \subsetneq \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^2$. Posons $g = f - \lambda \text{Id}$ et donnons-nous x dans $\text{Ker } g^2$. Alors $g(g(x)) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker } g$ mais $g(x) \neq 0$; la famille $(x, g(x))$ est donc libre. Si F est le sous-espace qu'elle engendre, c'en est une base dans laquelle on a

$$\text{Mat}(\pi_F g|_F) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}(\pi_F f|_F) = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

En outre, $a \neq 0$ puisque $f(x) \neq 0$. Par suite, $\pi_F \circ f|_F$ n'est donc pas diagonalisable.

On suppose en plus que $d = 3$ ou 4 et on a notre sous-espace F de dimension 2, tel que λ soit valeur propre double de $\pi_F f|_F$, mais cet endomorphisme de F n'est pas diagonalisable. En particulier, il n'est pas normal et d'après la partie 2, cela signifie que $\mathcal{H}(\pi_F f|_F)$ est un disque elliptique non dégénéré. Il contient en outre λ , qui est valeur propre de $\pi_F f|_F$ (question 1.1). On a ainsi

$$\lambda \in \underbrace{\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)}_{\text{non dégénéré}} \subset \mathcal{H}(f) = \text{Conv}(\lambda, \text{les au plus 2 autres valeurs propres de } f)$$

D'après la question 4.4, λ ne peut être un sommet du convexe polygonal $\mathcal{H}(f)$. Donc $\mathcal{H}(f)$ est en fait l'enveloppe convexe des valeurs propres de f autres que λ . Mais cela fait de $\mathcal{H}(f)$ un segment, un point ou l'ensemble vide. Ce qui contredit le fait que $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$ n'est pas dégénéré.

Conclusion :

f est diagonalisable.

Reste à établir qu'il est normal. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'il est diagonalisable dans une base orthonormée (question 2.3), ou encore que les sous-espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont deux-à-deux orthogonaux. On se donne donc x et y , vecteurs propres de f relatifs à des valeurs propres distinctes λ et μ . Alors $F = \text{Vect}(x, y)$ est un plan, stable par f .

Si ni λ , ni μ , n'est un sommet de $\mathcal{H}(f)$, ce dernier est l'enveloppe convexe d'au plus deux sommets (les au plus deux autres valeurs propres de f). Donc $\mathcal{H}(f)$ est un segment ou un point. Du coup, $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F)$ est un disque elliptique dégénéré : $\pi_F \circ f|_F$ est normal (question 3.4); x et y sont donc orthogonaux.

Si l'un des deux λ ou μ est un sommet de $\mathcal{H}(f)$, la question 4.5.1 établit également que $\pi_F \circ f|_F$ est normal; x et y sont orthogonaux.

Des vecteurs propres de f , relatifs à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux. De fait, f est normal.

Si $\dim E \leq 4$ et si $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f , alors f est normal.

4.8. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de E . Si $\dim E = 1$ et f est de trace nulle, alors $f = 0$ et sa matrice dans toute base de E est nulle.

Supposons le résultat vrai en dimension $n \geq 1$: si E est hermitien de dimension n et f est un endomorphisme de E de trace nulle, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f n'a que des 0 sur la diagonale.

Soient E hermitien de dimension $n + 1$ et f un endomorphisme de E dont la trace est nulle. La somme des valeurs propres de f est donc nulle ; ou encore, leur moyenne est nulle. Mais chacune d'elle est dans $\mathcal{H}(f)$ d'après la question 1.1. Et $\mathcal{H}(f)$ est convexe ; leur moyenne est donc aussi dans $\mathcal{H}(f)$. Il existe $z_{n+1} \in E$, unitaire, tel que $\langle z_{n+1} | f(z_{n+1}) \rangle = 0$.

On note $F = \{z_{n+1}\}^\perp$. C'est un sous-espace de E de dimension n . Si on note π_F la projection orthogonale de E sur F , $g = \pi_F \circ f|_F$ est un endomorphisme de F . Si l'on se donne une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de F , on sait que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr } f = \sum_{i=1}^n \langle \underbrace{e_i}_{=\pi_F(e_i)} | f(e_i) \rangle + \underbrace{\langle z_{n+1} | f(z_{n+1}) \rangle}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i | \pi_F f(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i | g(e_i) \rangle \\ 0 &= \text{Tr } g \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(z_1, \dots, z_n)$ de F dans laquelle la matrice de g est de diagonale nulle. Autrement dit,

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \quad 0 = \langle z_i | g(z_i) \rangle = \langle z_i | \pi_F f(z_i) \rangle = \langle \pi_F(z_i) | f(z_i) \rangle = \langle z_i | f(z_i) \rangle$$

La diagonale de la matrice de f dans la base orthonormée $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$ est donc nulle, ce qui montre l'hérédité.

Si $\text{Tr } f = 0$, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f a sa diagonale nulle.

5 L'inégalité de Von Neumann

5.1. Soit f un endomorphisme normal. On le diagonalise dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$ de E et on note λ_i la valeur propre associée à chaque e_i . Quitte à renommer tout ce beau monde, on suppose que λ_d est une valeur propre de module maximal. Si $x \in E$, on le décompose dans cette base :

$$x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$$

Du coup,

$$f(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i e_i$$

et
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^d |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leq |\lambda_d|^2 \sum_{i=1}^d |x_i|^2 = |\lambda_d|^2 \|x\|^2$$

Si $|\lambda_d| \leq 1$, il vient que f est une contraction.

Réciproquement, si f est une contraction, alors

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad |\lambda_i| = \|\lambda_i e_i\| = \|f(e_i)\| \leq \|e_i\| = 1$$

Toutes les valeurs propres de f sont de module inférieur à 1.

f est une contraction si, et seulement si, ses valeurs propres sont toutes de module inférieur à 1.

On suppose maintenant que f est une contraction normale. Si P est un polynôme, on note

$$M = \sup \{P(\lambda) \mid |\lambda| \leq 1\}$$

On vérifie aisément que chaque e_i est vecteur propre de $P(f)/M$ de valeur propre associée $P(\lambda_i)/M$. Donc $P(f)/M$ est normal (diagonal dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$) et ses valeurs propres sont toutes inférieures à 1 en module puisque

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \left| \frac{P(\lambda_i)}{M} \right| \leq \frac{M}{M} = 1$$

$P(f)/M$ est alors une contraction :

$$\forall x \in E \quad \left\| \frac{P(f)(x)}{M} \right\| \leq \|x\|$$

ou encore

$$\forall x \in E \quad \|P(f)(x)\| \leq \sup_{|\lambda| \leq 1} |P(\lambda)| \cdot \|x\|$$

L'inégalité de Von Neuman est satisfaite si f est normal.

5.2. $f^* f$ est hermitien puisque

$$(f^* f)^* = f^* f^{**} = f^* f$$

Il est en particulier normal, donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$. On note λ_i la valeur propre associée à chaque e_i . Commençons par observer qu'elles sont toutes réelles et strictement positives :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \lambda_i &= \lambda_i \langle e_i \mid e_i \rangle = \langle e_i \mid \lambda_i e_i \rangle \\ &= \langle e_i \mid f^* f(e_i) \rangle = \langle f(e_i) \mid f(e_i) \rangle \\ \lambda_i &= \|f(e_i)\|^2 > 0 \end{aligned}$$

On définit alors un endomorphisme h de E par son action sur la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$$

de sorte que

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad h^2(e_i) = \lambda_i e_i = f^* f(e_i)$$

Du coup, $h = f^* f$ puisque ces endomorphismes coïncident sur une base. De plus, h est hermitien puisque

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \langle h(e_i) | e_j \rangle &= \langle \sqrt{\lambda_i} e_i | e_j \rangle = \sqrt{\lambda_i} \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sqrt{\lambda_i} \delta_{i,j} = \sqrt{\lambda_j} \delta_{i,j} \\ &= \sqrt{\lambda_j} \langle e_i | e_j \rangle = \langle e_i | \sqrt{\lambda_j} e_j \rangle \\ \langle h(e_i) | e_j \rangle &= \langle e_i | h(e_j) \rangle \end{aligned}$$

Il existe $h \in \text{End } E$, hermitien positif, tel que $f^* f = h^2$

Posons $u = (f^{-1})^* h$; on a alors $u^* = h f^{-1}$ de sorte que

$$u u^* = (f^{-1})^* h^2 f^{-1} = (f^{-1})^* f^* f f^{-1} = \text{Id}$$

Ainsi, $u^* = u^{-1}$ et u est unitaire. De plus, $u^{-1} = h f^{-1}$ donc $f = u h$.

Enfin, on suppose avoir trouvé deux autres endomorphismes ω et g , avec ω unitaire et g hermitien positif, tels que $f = \omega g$. Alors

$$f^* = g^* \omega^* = g \omega^{-1}$$

et

$$f^* f = g \omega^{-1} \omega g = g^2$$

Supposons, temporairement, avoir établi que $g = h$. De la relation $f = \omega g = \omega h = u h$, il vient $\omega = u$ puisque h est inversible.

On termine en expliquant pourquoi $g = h$. Soit μ une valeur propre de g et x un vecteur propre associé. Alors

$$f^* f(x) = g^2(x) = \mu^2 x$$

et x est vecteur propre de $f^* f$, relatif à la valeur propre μ^2 . Si l'on note $0 < \mu_1 < \dots < \mu_p$ les valeurs propres, deux-à-deux distinctes, de g on a montré que

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \text{Ker}(g - \mu_i \text{Id}) \subset \text{Ker}(f^* f - \mu_i^2 \text{Id}) \quad (1)$$

Mais g est hermitien, donc normal, donc diagonalisable et il vient

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(g - \mu_i \text{Id}) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(f^* f - \mu_i^2 \text{Id})$$

Si l'une des inclusions dans la relation (1) est stricte, on aura aussi une inclusion stricte ci-dessus, ce qui est absurde. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \text{Ker}(g - \mu_i \text{Id}) = \text{Ker}(f^* f - \mu_i^2 \text{Id})$$

On rappelle que $(e_1, \dots, e_d)$ est une base orthonormée de diagonalisation de $f^* f$ et que $\lambda_i > 0$ est la valeur propre de $f^* f$ relative à chaque e_i . De ce qui précède, e_i est aussi vecteur propre de g , relatif à une valeur propre μ telle que $\mu^2 = \lambda_i$. Soit $\mu = \sqrt{\lambda_i}$, puisque les valeurs propres de g sont positives. Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad g(e_i) = \sqrt{\lambda_i} = h(e_i)$$

g et h coïncident sur une base et sont donc égaux.

Il existe u unitaire et h hermitien, uniques, tels que $f = uh$.

5.3. On commence par montrer que l'ensemble U des endomorphismes unitaires de E est compact. On munit $\text{End } E$ de la norme d'application linéaire définie par

$$\forall f \in \text{End } E \quad \|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

et on commence par montrer que l'application $\text{Adj} : f \mapsto f^*$ est continue. Si f est un endomorphisme de E et $x \in E$ est de norme 1, on a

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x) | f^*(x) \rangle = \langle x | f f^*(x) \rangle \leq \|x\| \|f f^*(x)\|$$

par définition de l'adjoint et d'après Cauchy-Schwarz. Ensuite, par définition de la norme d'application linéaire, il vient

$$\|f^*\|^2 \leq \|f\| \|f^*\|$$

d'où $\forall f \in \text{End } E \quad \|f^*\| \leq \|f\|$

Ensuite, si $f \in \text{End } E$ est fixé, on a

$$\forall h \in \text{End } E \quad \|(f+h)^* - f^*\| = \|h^*\| \leq \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Ceci établit que Adj est continue sur $\text{End } E$. Par suite, $P : f \mapsto f^* f$ est continue sur $\text{End } E$ (la composition est continue car bilinéaire). Et dans la mesure où $U = P^{-1}(\text{Id})$, il vient que U est fermé.

Ensuite, si $f \in U$, on a

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|^2 = \langle f(x) | f(x) \rangle = \langle x | f^* f(x) \rangle = \langle x | x \rangle = \|x\|^2$$

ce qui montre que $\|f\| = 1$. Par suite, U est borné. Comme $\text{End } E$ est de dimension finie,

L'ensemble des endomorphismes unitaires est compact.

Répondons maintenant à la question posée. On ne suppose plus que f est inversible. Ce n'est pas grave : f admet un nombre fini de valeurs propres donc en posant

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f_k = f - \frac{1}{k} \text{Id}$$

on est sûr que f_k est inversible pour k assez grand, supérieur à un certain K . Toujours sous cette hypothèse, f_k peut se décomposer (de manière unique) sous la forme $f_k = \omega_k h_k$ avec ω_k unitaire et h_k hermitien. On peut extraire de $(\omega_k)_{k \geq K}$ une sous-suite convergente $(\omega_{\varphi(k)})_{k \geq K}$ de limite $\omega \in U$. Or,

$$\forall k \geq K \quad h_{\varphi(k)} = \omega_{\varphi(k)}^{-1} f_{\varphi(k)} = \omega_{\varphi(k)}^* f_{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \omega^* f = \omega^{-1} f$$

On a utilisé ici la continuité de Adj et de la composition dans $\text{End } E$. On pose alors $h = \omega^{-1}f$ de sorte que $f = \omega h$. Reste à voir que h est hermitien. Mais l'ensemble des endomorphismes hermitiens est fermé, puisqu'il s'agit de $(\text{Adj} - \text{Id})^{-1}(\{0\})$, image réciproque d'un fermé par une application continue. Comme h est limite d'endomorphismes hermitiens, il est lui-même hermitien.

Si $f \in \text{End } E$, il existe h hermitien et ω unitaire tels que $f = \omega h$.

5.4. On a vu au cours de la preuve de la compacité de U , dans la question 5.3, que les endomorphismes unitaires préservent la norme. Donc

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|uh(x)\| = \|h(x)\|$$

Par suite, f est une contraction si, et seulement si, h en est une. Et en utilisant la question 5.2 et le fait qu'un endomorphisme hermitien est normal,

f est une contraction si, et seulement si, les valeurs propres de h sont toutes de module inférieur à 1.

5.5. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$ fixé. La relation à montrer étant linéaire, il suffit de l'établir pour une base de $\mathbb{C}[X]$. Par exemple, pour la famille $((X - z_0)^k \mid k \in \mathbb{N})$. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé et prenons $Q = (X - z_0)^k$. On a

$$\int_0^{2\pi} Q(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quel que soit le cas considéré, on trouve $2\pi Q(z_0)$ dans le membre de droite. D'après l'observation préliminaire,

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X] \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall r \geq 0 \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta = Q(z_0)$$

5.6. Observons d'abord que si Q est un polynôme, en appliquant à Q^2 la relation obtenue à la question 5.5, on obtient

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall r \geq 0 \quad Q(z_0)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + r e^{i\theta})^2 d\theta$$

d'où
$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \quad \forall r \geq 0 \quad |Q(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Il est alors immédiat, par additivité de l'intégrale, que

Si $Q_1, \dots, Q_d$ sont dans $\mathbb{C}[X]$, alors pour tous $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$,

$$|Q_1(z_0)|^2 + \dots + |Q_d(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|Q_1(z_0 + r e^{i\theta})|^2 + \dots + |Q_d(z_0 + r e^{i\theta})|^2) d\theta$$

Pour alléger les notations, on note f la fonction $|Q_1|^2 + \dots + |Q_d|^2$. Faisons une observation : les deux sups à comparer sont, en fait, des max, compte-tenu du fait que f est continue, et que le disque unité fermé ou le cercle unité sont compacts. Le cercle unité étant inclus dans le disque unité de $\mathbb{C}$, il est clair que

$$\sup_{|z|=1} f(z) \leq \sup_{|z| \leq 1} f(z)$$

Pour la réciproque, supposons que $\sup_{|z| \leq 1} f(z)$ n'est pas atteint sur le cercle unité. Ceci signifie qu'il existe $z_0 = |z_0| e^{i\theta_0}$ tel que $|z_0| < 1$ et

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1 \implies f(z) < f(z_0)$$

On pose alors $r = 1 - |z_0| > 0$ et on observe que

$$\forall \theta \in [0; 2\pi] \quad |z_0 + r e^{i\theta}| \leq |z_0| + r = 1 \quad \text{et} \quad |z_0 + r e^{i\theta_0}| = 1$$

$$\text{de sorte que} \quad \forall \theta \in [0; 2\pi] \quad f(z) \leq f(z_0) \quad \text{et} \quad f(z_0 + r e^{i\theta_0}) < f(z_0) \quad (1)$$

Enfin, on utilise l'inégalité montrée au début de cette question :

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0) - f(z_0 + r e^{i\theta})) d\theta \leq 0$$

La fonction $\theta \mapsto f(z_0) - f(z_0 + r e^{i\theta})$ est continue sur $[0; 2\pi]$, positive et non nulle d'après (1). Son intégrale sur $[0; 2\pi]$ est donc strictement positive. On a une contradiction. Donc $\sup_{|z| \leq 1} f(z)$ est atteint sur le cercle unité.

$$\boxed{\sup_{|z| \leq 1} (|Q_1(z)|^2 + \dots + |Q_d(z)|^2) = \sup_{|z|=1} (|Q_1(z)|^2 + \dots + |Q_d(z)|^2)}$$

Pour généraliser aux polynômes à plusieurs variables, on observe que le résultat qu'on vient d'établir amorce une récurrence sur le nombre de variables. On suppose donc savoir que, si $Q_1, \dots, Q_d$ sont des polynômes à coefficients complexes en $n \geq 1$ variables, alors

$$\begin{aligned} \sup_{|z_1|, \dots, |z_n| \leq 1} (|Q_1(z_1, \dots, z_n)|^2 + \dots + |Q_d(z_1, \dots, z_n)|^2) \\ = \sup_{|z_1|, \dots, |z_n|=1} (|Q_1(z_1, \dots, z_n)|^2 + \dots + |Q_d(z_1, \dots, z_n)|^2) \end{aligned}$$

et on se donne $Q_1, \dots, Q_d$ des polynômes en $n+1$ variables. À nouveau pour alléger les notations, on pose $f = |Q_1|^2 + \dots + |Q_d|^2$. On fixe un nombre complexe z et on pose

$$g(z) = \sup_{|z_1|, \dots, |z_n| \leq 1} f(z_1, \dots, z_n, z)$$

La fonction $(z_1, \dots, z_n) \mapsto f(z_1, \dots, z_n, z)$ est de la bonne forme (somme de carrés de modules de polynômes en n variables) pour lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe des complexes $w_1, \dots, w_n$, de module 1, tels que

$$\forall z_1, \dots, z_n \quad |z_1|, \dots, |z_n| \leq 1 \implies f(z_1, \dots, z_n, z) \leq f(w_1, \dots, w_n, z) = g(z)$$

Mais la fonction g est une somme de carrés de fonctions polynomiales en 1 variable donc il existe w_{n+1} , de module 1, tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \leq 1 \implies g(z) \leq g(w_{n+1})$$

Au finale, pour tous nombres complexes $z_1, \dots, z_{n+1}$ dans le disque unité, on a

$$f(z_1, \dots, z_{n+1}) \leq f(w_1, \dots, w_n, z_{n+1}) \leq f(w_1, \dots, w_n, w_{n+1})$$

Et la récurrence peut se poursuivre puisque $w_1, \dots, w_{n+1}$ sont de module 1.

Pour tout entier $n \geq 1$, pour tous polynômes $Q_1, \dots, Q_d$ en n variables, on a

$$\begin{aligned} \sup_{|z_1|, \dots, |z_n| \leq 1} (|Q_1(z_1, \dots, z_n)|^2 + \dots + |Q_d(z_1, \dots, z_n)|^2) \\ = \sup_{|z_1|, \dots, |z_n| = 1} (|Q_1(z_1, \dots, z_n)|^2 + \dots + |Q_d(z_1, \dots, z_n)|^2) \end{aligned}$$

5.7. L'addition et la multiplication matricielles sont des applications dont les coordonnées sont polynomiales en les coefficients. Donc, si x , u , w et P sont fixés, $P(f_\mu)(x)$ aura pour coefficients des polynômes en $(\mu_1, \dots, \mu_d)$.

Il existe des polynômes $Q_1, \dots, Q_d$ à d indéterminées tels que

$$P(f_\mu)(x) = \begin{bmatrix} Q_1(\mu_1, \dots, \mu_d) \\ \vdots \\ Q_d(\mu_1, \dots, \mu_d) \end{bmatrix}$$

Du coup, $\|P(f_\mu)(x)\|^2 = |Q_1(\mu_1, \dots, \mu_d)|^2 + \dots + |Q_d(\mu_1, \dots, \mu_d)|^2$

et il est immédiat, au vu du résultat de la question 5.6, que

$$\sup_{|\mu_1|, \dots, |\mu_d| \leq 1} \|P(f_\mu)(x)\| = \sup_{|\mu_1|, \dots, |\mu_d| = 1} \|P(f_\mu)(x)\|$$

5.8. Soient f une contraction, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $x \in E$. La question 5.3 assure l'existence de h hermitien et u unitaire, tels que $f = uh$. D'après la question 5.4, les valeurs propres de h sont toutes de module inférieur à 1. On les note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$.

On se place dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ qui diagonalise h . On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix}$$

Ce qui nous autorise à utiliser la question 5.7, avec $w = \text{id}$, qui assure l'existence d'un d -uplet de complexes $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ de module 1, tels que

$$\|P(f)(x)\| \leq \|P(f_\mu)(x)\|$$

On rappelle que les sup dans ce cas sont des max. Toujours est-il que l'endomorphisme d_μ est alors une isométrie. En effet,

$$\begin{aligned} \forall (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \quad \|d_\mu(z_1 e_1 + \dots + z_d e_d)\|^2 &= \|\mu_1 z_1 e_1 + \dots + \mu_d z_d e_d\|^2 \\ &= |\mu_1 z_1|^2 + \dots + |\mu_d z_d|^2 \\ &= |z_1|^2 + \dots + |z_d|^2 \\ \|d_\mu(z_1 e_1 + \dots + z_d e_d)\|^2 &= \|z_1 e_1 + \dots + z_d e_d\|^2 \end{aligned}$$

Puisque $f_\mu = u d_\mu$, f_μ est également une isométrie ; en particulier, f_μ est normal. D'après la question 5.1,

$$\|P(f_\mu)(x)\| \leq \sup_{|z| \leq 1} |P(z)| \cdot \|x\|$$

Par suite,

$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad \forall x \in E \quad \ P(f)(x)\ \leq \sup_{ z \leq 1} P(z) \cdot \ x\ $
