

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - MP

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE 1

Première méthode

1. Soit $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.

La fonction h est une fonction polynomiale de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 . Ses points critiques sont les points où le gradient s'annule. On a

$$\nabla h(u, v, w) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial w} \right) = (4u - 4, 2v, 2w).$$

Donc (u, v, w) est un point critique si et seulement si $\nabla h(u, v, w) = (0, 0, 0)$, ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 4u - 4 = 0 \\ 2v = 0 \\ 2w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Il y a un unique point critique : $(1, 0, 0)$.

La matrice hessienne de h est

$$H_h(u, v, w) = \left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } h = (h_1, h_2, h_3)$$

C'est une matrice symétrique (*diagonale*), et ses valeurs propres sont strictement positives.

Donc, la matrice hessienne de h est symétrique définie positive. h admet un minimum local en $(1, 0, 0)$.

Un détail de plus : $(1, 0, 0)$ est un minimum global strict, car la fonction est polynomiale de degré 2 donc la formule de Taylor-Young est exacte, le reste est nul.

$$h(a+k) - h(a) = k^\top H_h(a)k = 4k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 \geq 0, \text{ avec } a = (1, 0, 0) \text{ et } k = (k_1, k_2, k_3)$$

La fonction h n'admet pas de maximum global car $\lim_{u \rightarrow \infty} h(u, 0, 0) = +\infty$.

2. Soit $X = (x, y, z, t) \in H$, alors $x = 2 - y$.

On substitue dans $f(X)$:

$$f(2 - y, y, z, t) = (2 - y)^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2y^2 + z^2 + t^2 - 4y + 4.$$

donc $f(2 - y, y, z, t) = h(y, z, t)$. Autrement dit $f|_H = h$.

D'après la question 1, la fonction h admet un minimum global strict en $(y_0, z_0, t_0) = (1, 0, 0)$.

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

Donc f admet sur H un minimum global strict en $X_0 = (1 - y_0, y_0, z_0, t_0) = (1, 1, 0, 0)$.

La valeur minimale de f sur H est $f(X_0) = 2$.

f n'admet pas de maximum global sur H .

Deuxième méthode

3. Soit $g : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

On recherche des extremums de f sous la contrainte $g(X) = 0$. f et g sont de classe \mathcal{C}^1 .

D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange : Si f admet un extremum X_0 sous la contrainte $g(X) = 0$ et $\nabla g(X_0) \neq 0$ alors $\nabla f(X_0)$ est colinéaire à $\nabla g(X_0)$.

On cherche les points $X = (x, y, z, t)$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\nabla f(X) = \lambda \nabla g(X)$.

On a

$$\nabla f(X) = (2x, 2y, 2z, 2t) \text{ et } \nabla g(X) = (1, 1, 0, 0).$$

la condition $\nabla g(X) \neq 0$ est toujours réalisée.

Le système des multiplicateurs de Lagrange est :

$$\begin{cases} \nabla f(X) = \lambda \nabla g(X) \\ g(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = 0 \\ 2t = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \lambda/2 \\ z = t = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = t = 0 \end{cases}$$

L'unique point candidat est $X_0 = (1, 1, 0, 0)$.

4. H est un fermé non borné. Le point X_0 appartient à $[0, 1]^4$, considérons $F = H \cap [0, 1]^4$. F est un fermé et borné donc il est compact, f est continue donc elle est bornée et atteint ses bornes sur F .

Comme $f(1, 1, 0, 0) = 2 < f(1, 1, 1, 1) = 4$, alors f admet un minimum en $X_0 = (1, 1, 0, 0)$.

Troisième méthode

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto x + y$. φ est une forme linéaire non nulle sur \mathbb{R}^4 . On a $F = \text{Ker}(\varphi)$, donc F est sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , c'est un hyperplan de \mathbb{R}^4 , il est de dimension 3.
6. Par définition de F on a $u = (1, 1, 0, 0) \in F^\perp$. Comme $\dim F^\perp = 1$ alors $F^\perp = \text{Vect}(u)$.
7. Soit $Y = (-1, -1, 0, 0)$. On a d'après le théorème de la projection orthogonale

$$d(Y, F) = \min_{X \in F} \|Y - X\| = \|Y - p_F(Y)\|$$

Comme $Y = -u \in F^\perp$ alors $p_F(Y) = 0$, donc $d(Y, F) = \|Y\| = \sqrt{2}$.

8. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a $X + Y = (x - 1, y - 1, z, t)$ et

$$X + Y \in F \iff x + y - 2 = 0 \iff X \in H$$

9. $H = F + \{-Y\}$, donc c'est un sous-espace affine de \mathbb{R}^4 , passant par $-Y$ et dirigé par F .

10. On cherche à minimiser $\|X\|^2$ pour $X \in H$.

On a d'après Q7

$$\min_{X \in H} \|X\|^2 = \min_{X' \in F} \|X' - Y\|^2 = d^2(Y, F) = 2$$

cette distance est atteinte en $X' = p_F(Y) = 0$, donc le $\min_{X \in H} \|X\|^2$ est atteint en $X = -Y = (1, 1, 0, 0)$.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Posons $S_m = \sum_{k=1}^n (\omega^m)^{(k-1)}$.

On a $S_m = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^m)^j$. C'est une somme géométrique de raison ω^m .

- Si n divise m , alors $\omega^m = 1$ et $S_m = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$.
- Si n ne divise pas m , alors $\omega^m \neq 1$ et

$$S_m = \frac{(\omega^m)^n - 1}{\omega^m - 1} = \frac{(\omega^n)^m - 1}{\omega^m - 1} = 0$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n (\omega^m)^{(k-1)} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid m \\ 0 & \text{si } n \nmid m \end{cases}$

2. Pour $n = 3$, rappelons $\omega = j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On a

$$\varphi_j(P) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{q=0}^2 P(j^q) X^q$$

Pour $r \in \{0, 1, 2\}$ on a

$$\varphi_\omega(Q_r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{q=0}^2 Q_r(j^q) X^q = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{s=0}^2 (j^q)^r X^q.$$

par suite

$$\varphi_\omega(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + X + X^2) \quad , \quad \varphi_\omega(Q_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + jX + j^2X^2) \quad \text{et} \quad \varphi_\omega(Q_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + j^2X + jX^2)$$

Ainsi $A_\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

3. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$\varphi_\omega(Q_{\ell-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} Q_{\ell-1}(\omega^q) X^q = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} (\omega^q)^{\ell-1} Q_q(X) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\omega^{k-1})^{\ell-1} Q_{k-1}(X)$$

Donc $a_{k,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}} (\omega^{k-1})^{\ell-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. A_ω est symétrique car $a_{k,\ell} = a_{\ell,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(k-1)(\ell-1)}$. Mais A_ω n'est pas réelle, on ne peut pas affirmer si elle est diagonalisable ou non.

5. Soit $(k, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient $A_\omega A_{\bar{\omega}}$ d'ordre (k, m) est donné par

$$\begin{aligned} [A_\omega A_{\bar{\omega}}]_{k,m} &= \sum_{\ell=1}^n [A_\omega]_{k,\ell} [A_{\bar{\omega}}]_{\ell,m} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \omega^{(k-1)(\ell-1)} \omega^{-(\ell-1)(m-1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \omega^{(\ell-1)(k-m)} \end{aligned}$$

D'après Q1, on a $[A_\omega A_{\bar{\omega}}]_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \mid (k-m) \\ 0 & \text{si } n \nmid (k-m) \end{cases}$, comme $k-m \in \llbracket 1-n, n-1 \rrbracket$

alors $[A_\omega A_{\bar{\omega}}]_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$.

Ainsi $[A_\omega A_{\bar{\omega}} = I_n]$ et A_ω est inversible et son inverse est $[A_\omega^{-1} = A_{\bar{\omega}}]$.

6. A_ω est la matrice, dans la base \mathcal{B} , de φ_ω donc elle est inversible et $[\varphi_\omega^{-1} = \varphi_{\bar{\omega}}]$

7. Calcul de $(A_\omega)^2$

Soit $(k, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient $(A_\omega)^2$ d'ordre (k, m) est

$$\begin{aligned} [(A_\omega)^2]_{k,m} &= \sum_{\ell=1}^n [A_\omega]_{k,\ell} [A_\omega]_{\ell,m} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \omega^{(k-1)(\ell-1)} \omega^{(\ell-1)(m-1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \omega^{(\ell-1)(k+m-2)} \end{aligned}$$

D'après Q1, on a $[(A_\omega)^2]_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \mid (k+m-2) \\ 0 & \text{si } n \nmid (k+m-2) \end{cases}$, comme $k+m-2 \in \llbracket 0, 2n-2 \rrbracket$ alors

$$n \mid (k+m-2) \Leftrightarrow k=m=1 \text{ ou } k+m=n+2$$

Ainsi $[(A_\omega)^2]_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=m=1 \text{ ou } k+m=n+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui s'écrit :

$$(A_\omega)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de $(A_\omega)^4$.

$(A_\omega)^4$ est la matrice de $(\varphi_\omega)^4$ dans la base \mathcal{B} . De l'expression de $(A_\omega)^2$ on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_\omega)^2(Q_0) = Q_0, \\ (\varphi_\omega)^2(Q_1) = Q_{n-1}, \\ \vdots \\ (\varphi_\omega)^2(Q_k) = Q_{n-k}, \\ \vdots \\ (\varphi_\omega)^2(Q_{n-1}) = Q_1 \end{array} \right.$$

par suite

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_\omega)^4(Q_0) = (\varphi_\omega)^2(Q_0) = Q_0, \\ (\varphi_\omega)^4(Q_1) = (\varphi_\omega)^2(Q_{n-1}) = Q_1 \\ \vdots \\ (\varphi_\omega)^4(Q_k) = (\varphi_\omega)^2(Q_{n-k}) = Q_k, \\ \vdots \\ (\varphi_\omega)^4(Q_{n-1}) = (\varphi_\omega)^2(Q_1) = Q_{n-1} \end{array} \right.$$

Donc $(\varphi_\omega)^4$ coïncide avec l'application identité sur la base \mathcal{B} , ce qui donne $(\varphi_\omega)^4 = \text{Id}_{E_{n-1}}$ et $(A_\omega)^4 = I_n$.

8. Le polynôme $X^4 - 1$ annule A_ω , ces racines sont $\{1, -1, i, -i\}$.

A_ω admet un polynôme annulateur scindé à racine simple donc elle est diagonalisable.

9. Les valeurs propres de A_ω sont parmi les racines du polynôme $X^4 - 1$, c'est-à-dire $\text{Sp}(A_\omega) \subset \{1, -1, i, -i\}$.

10. Les racines de $X^n - 1 = 0$ sont $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

11. Soit $q \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Comme ω^q est racine de $X^n - 1$, alors $X - \omega^q$ divise $X^n - 1$. Par suite $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$ est un polynôme de degré $n - 1$, donc $L_q \in E_{n-1}$.

12. Soit $H_0 = \text{Vect}(Q_0, L_0)$. On a

$$\varphi_\omega(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} Q_0(\omega^s) X^s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} X^s = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0(X) \in H_0.$$

et

$$\varphi_\omega(L_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} L_0(\omega^k) X^k.$$

puisque $L_0(\omega^k) = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^k)^j = \begin{cases} n & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$, donc

$$\varphi_\omega(L_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} (L_0(\omega^0) X^0) = \frac{1}{\sqrt{n}} (n \cdot Q_0(X)) = \sqrt{n} Q_0(X) \in H_0.$$

Ainsi H_0 est stable par φ_ω .

13. Soit $\psi = (\varphi_\omega)|_{H_0}$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, L_0)$ la base de H_0 . On a $\psi(Q_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} L_0$ et $\psi(L_0) = \sqrt{n} \cdot Q_0$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Comme H_0 est stable par φ_ω , donc tout vecteur propre de ψ est aussi vecteur propre de φ_ω .

• Soit $P_1 = aQ_0 + bL_0 \in H_0$ tel que $\varphi_\omega(P_1) = \psi(P_1) = P_1$. Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{n}b = a \\ \frac{1}{\sqrt{n}}a = b \end{cases}$$

on a une solution : $a = \sqrt{n}$ et $b = 1$, et

$$P_1(X) = \sqrt{n}Q_0(X) + L_0(X) = \sqrt{n} + \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

• Soit $P_{-1} = aQ_0 + bL_0 \in H_0$ tel que $\varphi_\omega(P_{-1}) = \psi(P_{-1}) = P_{-1}$. Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{n}b = -a \\ \frac{1}{\sqrt{n}}a = -b \end{cases}$$

on a une solution : $a = -\sqrt{n}$ et $b = 1$, et

$$P_{-1}(X) = -\sqrt{n}Q_0(X) + L_0(X) = -\sqrt{n} + \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

Ainsi $P_1(X) = \sqrt{n} + \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \text{Ker}(\varphi_\omega - \text{Id}_{E_{n-1}})$ et $P_{-1}(X) = -\sqrt{n} + \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \text{Ker}(\varphi_\omega + \text{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Cas $n = 3$.

On a $\text{Sp}(A_\omega) \subset \{1, -1, i\}$ et d'après Q14 $\{1, -1\} \subset \text{Sp}(A_\omega)$.

D'après Q2

$$\text{Tr}(A_\omega) = \frac{2j+1}{\sqrt{3}} = i \quad (\text{car } j = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

Si 1 ou -1 est de multiplicité 2 alors $\text{Tr}(A_\omega) \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde, donc forcément 1 et -1 sont d'ordre 1 et $i \in \text{Sp}(A_\omega)$.

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(A_\omega) = \{1, -1, i\}}$.

16. Cas $n = 4$.

On a $\text{Sp}(A_\omega) \subset \{1, -1, i, -i\}$ et d'après Q14 $\{1, -1\} \subset \text{Sp}(A_\omega)$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(A_\omega)$ posons m_λ l'ordre de λ .

On a

$$m_1 + m_{-1} + m_i + m_{-i} = 4 \quad (1)$$

et

$$\text{Tr}(A_\omega) = m_1 - m_{-1} + (m_i - m_{-i})i = \sum_{k=1}^4 a_{k,k}$$

avec $a_{k,k} = \frac{1}{2}\omega^{(k-1)^2}$ et $\omega = e^{2i\pi/4} = i$, donc

$$\text{Tr}(A_\omega) = \frac{1}{2}(i^0 + i + i^4 + i^9) = 1 + i$$

par suite

$$m_1 - m_{-1} + (m_i - m_{-i})i = 1 + i \quad (2)$$

Nous avons donc de (1) et (2)

$$\begin{cases} m_1 + m_{-1} + m_i + m_{-i} = 4 & (1) \\ m_1 - m_{-1} = 1 & (3) \\ m_i - m_{-i} = 1 & (4) \end{cases}$$

forcement on a

$$1 \leq m_{-1} < m_1, \quad 0 \leq m_{-i} < m_i.$$

Les relations (1), (3) et (4) donnent

$$1 + 2m_{-1} + 1 + 2m_{-i} = 4 \Leftrightarrow m_{-1} + m_{-i} = 1$$

donc

$$m_{-1} = 1 \text{ et } m_{-i} = 0$$

par suite

$$m_1 = 2 \text{ et } m_i = 1$$

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(A_\omega) = \{1, -1, i\} \text{ et } \chi_{A_\omega}(X) = (X-1)^2(X+1)(X-i)}$.

17. On note cette matrice M . Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & -\frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & -\frac{\omega}{\sqrt{n}} & \lambda & 0 \\ -\frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ -\frac{\omega}{\sqrt{n}} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{vmatrix} - \frac{\sqrt{n}}{\omega} \begin{vmatrix} 0 & \lambda & -\frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & -\frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 \\ -\frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -\frac{\omega}{\sqrt{n}} & \lambda \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{n}}{\omega} \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ -\frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^4 - \frac{\sqrt{n}}{\omega} \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} \frac{\omega}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\
&= \lambda^4 - 1
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi_M(\lambda) = \lambda^4 - 1$ et $\text{Sp}(M) = \{1, -1, i, -i\}$.

18. Soit $n \geq 5$.

On a $Q_q(X) = X^q$ et $L_q(X) = \frac{X^n - 1}{X - \omega^q}$.

- Soit α, β, γ et δ dans \mathbb{C} tels que :

$$\alpha Q_1 + \beta Q_{n-1} + \gamma L_1 + \delta L_{n-1} = 0 \quad (1)$$

Soit $q \notin \{1, n-1\}$ on a $L_1(\omega^q) = L_{n-1}(\omega^q) = 0$.

Donc pour $X = 1$ on a $\alpha \omega^q + \beta \omega^{q(n-1)} = 0$, ce qui donne $\alpha = \beta = 0$.

La relation (1) devient $\gamma L_1 + \delta L_{n-1} = 0$.

Comme $L_{n-1}(\omega) = 0$ et $L_1(\omega) \neq 0$, alors pour $X = \omega$ on a $\gamma = 0$, en suite $\delta = 0$.

Ainsi la famille $(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est libre et $\dim(G) = 4$.

- Stabilité de G :

Image de Q_1 :

Comme dans Q12 on a :

$$\varphi_\omega(Q_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} Q_1(\omega^s) X^s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} \omega^s X^s = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - (\omega X)^n}{1 - \omega X} = \frac{1}{\omega \sqrt{n}} \frac{1 - X^n}{\omega^{n-1} - X}$$

donc $\boxed{\varphi_\omega(Q_1) = \frac{1}{\omega \sqrt{n}} L_{n-1} \in G}$.

Image de L_{n-1} :

Dans Q7 on a établi : $(\varphi_\omega)^2(Q_k) = Q_{n-k}$ pour tout $k \in [1, n-1]$, donc

$$\varphi_\omega(L_{n-1}) = \omega \sqrt{n} (\varphi_\omega)^2(Q_1) = \omega \sqrt{n} Q_{n-1}.$$

Ainsi $\boxed{\varphi_\omega(L_{n-1}) = \omega \sqrt{n} Q_{n-1} \in G}$.

Image de Q_{n-1} :

On a

$$\varphi_\omega(Q_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} Q_{n-1}(\omega^s) X^s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} \omega^{(n-1)s} X^s = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1 - (\omega^{n-1} X)^n}{1 - \omega^{n-1} X} = \frac{1}{\omega^{n-1} \sqrt{n}} \frac{1 - X^n}{\omega - X}.$$

donc $\boxed{\varphi_\omega(Q_{n-1}) = \frac{1}{\omega\sqrt{n}}L_1 \in G}$.

Image de L_1 :

On a $\varphi_\omega(L_1) = \omega\sqrt{n}(\varphi_\omega)^2(Q_{n-1}) = \omega\sqrt{n}Q_{n-1}$.

Ainsi $\boxed{\varphi_\omega(L_1) = \omega\sqrt{n}Q_1 \in G}$.

Donc G est stable par φ_ω .

19. Soit ψ la restriction de φ_ω à G . La matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_G = (Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est

$$M = \begin{array}{cccc} & \varphi_\omega(Q_1) & \varphi_\omega(Q_{n-1}) & \varphi_\omega(L_1) & \varphi_\omega(L_{n-1}) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \frac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \leftarrow Q_1 & \leftarrow Q_{n-1} & \leftarrow L_1 & \leftarrow L_{n-1} \end{array}$$

D'après Q17 $\chi_\psi(\lambda) = \lambda^4 - 1$ et on sait que χ_ψ divise χ_{φ_ω} donc $\text{Sp}(\psi) = \{1, -1, i, -i\} \subset \text{Sp}(\varphi_\omega)$.

D'après Q9 on a $\text{Sp}(\varphi_\omega) \subset \{1, -1, i, -i\}$, d'où $\boxed{\text{Sp}(\varphi_\omega) = \{1, -1, i, -i\}}$.

EXERCICE 3

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$. Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

On pose, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Soit $a_n = \frac{1}{(n!)^2}$. On a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Après la règle du D'Alembert le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $+\infty$. f est donc définie sur \mathbb{R} .

3. f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, elle est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

4. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On a f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, donc f' est bornée sur $[a, b]$.

Soit x, y dans $[a, b]$, par le TAF il existe $c \in [a, b]$ (entre x et y), tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| \leq \|f'\|_{\infty, [a, b]} |x - y|.$$

Ainsi f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

5. Par dérivation d'une série entière on a pour tout x dans \mathbb{R}

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} x^n$$

Pour $n \geq 0$, on a $\frac{n}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n!}$, donc si $x \geq 0$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Ainsi pour tout $x \geq 0$ $\boxed{f'(x) \leq e^x}$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Par TAF, il existe $c \in [\min(x, y), \max(x, y)]$ tel que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$.

Comme $0 \leq c \leq z$, alors $f'(c) \leq e^c \leq e^z$. Ainsi $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|}$.

7. Soit x dans \mathbb{R} , on a

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

et

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{((n+2)!)^2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+2}}{n!} \leq |x|^2 e^x$$

par suite

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$$

Ainsi $\boxed{f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$.

8. On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt$.

On a f est \mathcal{C}^∞ et $f(t) > 0$ pour tout $t > 0$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t[f(t)]^2}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, par suite g est \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

9. On a :

- Si $x > 1$ $g(x) > 0$.
- Si $x = 1$ $g(x) = 0$.
- Si $x < 1$ $g(x) < 0$.

10. Soit $0 < t \leq 1$. On a

$$\frac{1}{t[f(t)]^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t} \frac{1}{[1 + t + o(t)]^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t[f(t)]^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Le théorème d'intégration des relations de comparaison donne

$$\int_1^x \frac{1}{t[f(t)]^2} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Ainsi $\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)}$.

11. Soit $t > 0$. On a

$$f(t) = 1 + t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$$

et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2} > 0$.

Donc pour tout $t > 0$, $\boxed{f(t) > 1 + t}$.

12. Soit $1 \leq t \leq x$. On a

$$\frac{1}{t[f(t)]^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2} \leq \frac{1}{(1+t)^2}$$

donc

$$0 \leq g(x) \leq \int_1^x \frac{dt}{(1+t)^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}$$

g est bornée, or elle est croissante sur $[1, +\infty[$, donc elle admet une limite en $+\infty$.

13. La décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{(1+X)^2}$$

On a

$$a = \left[XF(X) \right]_{X=0} = \left[\frac{1}{(1+X)^2} \right]_{X=0} = 1$$

$$c = \left[(X+1)^2 F(X) \right]_{X=-1} = \left[\frac{1}{X} \right]_{X=-1} = -1$$

et

$$F(1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{b}{2} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = -1$$

Ainsi
$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+X)^2}$$

14. On a pour $1 \leq t \leq x$

$$\frac{1}{t[f(t)]^2} \leq \frac{1}{t(1+t)^2}$$

donc

$$g(x) \leq \int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2} dt$$

D'après Q13 on a

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2} dt &= \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \\ &= \left[\ln(t) - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t} \right]_1^x \\ &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi
$$g(x) \leq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2} dt$ est croissante, donc majorée par sa limite en $+\infty$ donc

$$\int_1^x \frac{1}{t(1+t)^2} dt = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x} + \ln(2) - \frac{1}{2} \leq \ln(2) - \frac{1}{2} \leq \ln(2)$$

donc pour $1 \leq x$, $g(x) \leq \ln(2)$. Mais pour $0 < x \leq 1$, $g(x) \leq 0$.

Ainsi pour tout $x > 0$ on a $g(x) \leq \ln(2)$.