CCP2017 - MP1
Un corrigé

Exercice 1

1. Les fonctions f et g sont de classe C^∞ par théorèmes d'opérations. Elle sont donc différentiables en tout point et les jacobiennes sont

$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$

$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (a) On a facilement

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\circ g(x,y) = \sin((x+y)^2 - (x-y)^2) = \sin(4xy)$$

On en déduit que

$$d(f\circ g)(x,y)\ :\ (u,v) \mapsto \frac{\partial f\circ g}{\partial x}u + \frac{\partial f\circ g}{\partial y}v = 4(yu+xv)\cos(4xy)$$

(b) On peut aussi dire que

$$\begin{aligned} J(f\circ g)(x,y) &= J(f)(g(x,y)) \times J(g)(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & 2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x\cos(4xy) & 4y\cos(4xy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient l'image de (u,v) en multipliant la jacobienne par la matrice colonne associé à (u,v). On obtient bien sûr le même résultat.

Exercice 2

Comme les familles proposées sont à valeurs positives, le caractère sommable équivaut au caractère borné des sommes finies. Et dans ce cas, on sait que l'on peut obtenir la somme en sommant dans l'ordre que l'on veut.

3. A q fixé, $\sum(\frac{1}{p^2q^2})_{p\geq 1}$ est une série convergente et sa somme est $S_q = \frac{\pi^2}{6q^2}$. $\sum(S_q)_{q\geq 1}$ converge et la famille proposée est ainsi sommable et

$$\sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

4. Il suffit de montrer qu'il existe des sous-familles finies de somme arbitrairement grande. Remarquons que $p^2+q^2 \leq (p+q)^2$. On considère la sous-famille constituée des éléments d'indice (p,q) avec $p+q \leq r$. La somme associée est

$$\sum_{k=2}^{r} \sum_{p+q=k} \frac{1}{p^2+q^2} \geq \sum_{k=2}^{r} \sum_{p+q=k} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{k=2}^{r} \frac{k+1}{k^2}$$

Comme $\frac{k+1}{k^2} \sim \frac{1}{k}$ est le terme général d'une série positive divergente, les sommes précédentes peuvent effectivement être arbitrairement grandes et la famille est non sommable.

Problème : séries trigonométriques

Partie 1 : exemples

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \le \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \ge 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p - e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4 - 2\cos(x)}{5 - 4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

6. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

7. Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

8. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

9. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \le |a_n| + |b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

10. On a ($(.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$)
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a\cos(x) + b\sin(x)| = |((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))| \le \|(a,b)\| \cdot \|(\cos(x),\sin(x))\| = \sqrt{a^2+b^2}$$
De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a,b) \neq (0,0)$, $(a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x), \sin(x))$.

11. Posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n > 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b^2} \geq \left\{ \begin{array}{l} |a_n| \\ |b_n| \end{array} \right.$$

Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

12. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x + 2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et

$$f \in C_{2\pi}$$

13. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. On a donc

$$\forall n \geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx + nx) + \sin(kx - nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ (évident si $p = 0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que

$$\forall n, k,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\ dx = 0$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx))\ dx$$

Posons encore $u_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\ dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\ dx\right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

15. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

16. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.
17. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

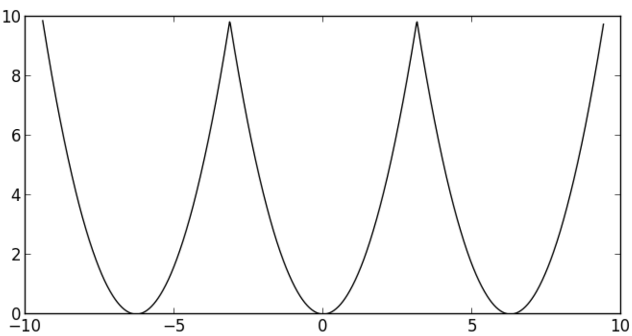
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx$$

18. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi, \pi]$ et on renvoie y^2.

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2

a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\ dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\ dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\ dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

19. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

20. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).
Utilisons le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\ dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Je choisis le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n\ :\ x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- La somme simple est continue sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)|\ dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

21. Dans l'exemple de la question 18, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).
Supposons que $\sum(na_n)$ et $\sum(nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.
   - $\forall n,\ u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)$.
   - $\sum(u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   - $\|u_n'\|_\infty \leq |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.
22. On a vu en question 5 que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$
On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}$$