

I- Caractérisation des matrices symétriques définies positives

– **I-A.1.2** : Soit $\lambda \in Sp(A)$, alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$, donc ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$ ce qui entraîne que $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

Si A est positive, alors $\lambda \geq 0$ et si A est définie positive, on aura $\lambda > 0$.

Réciproquement : A étant symétrique réelle, donc diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $A = PD^tP$, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ où on a posé ${}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Donc : si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$, alors ${}^tXAX \geq 0$ et si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^{*+}$, alors vu que X est non nul, tPX est aussi non nul, donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_j \neq 0$, et par suite ${}^tXAX \geq \lambda_j y_j^2 > 0$.

On a ainsi le résultat demandé.

– **I-B.1** : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ que nous supposons définie positive et soit $X_i \in M_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors en posant $X = \begin{pmatrix} X_i \\ O \end{pmatrix}$ où $O \in M_{n-i,1}(\mathbb{R})$, on aura ${}^tX_iAX_i = {}^tXAX > 0$, donc $A^{(i)}$ est définie positive pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

– On déduit donc que $\det(A^{(i)}) = \prod_{k=1}^i \mu_k > 0$ où μ_1, \dots, μ_i sont les valeurs propres de $A^{(i)}$ qui sont strictement positifs.

– **I-B.2** :

– Cas $n = 1$

Soit $A = (a)$ tel que $a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $ax^2 > 0$, donc A est définie positive.

– Cas $n = 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tel que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$. Les valeurs propres λ, μ de A vérifient $\lambda + \mu = a + c > 0$ et $\lambda\mu = ac - b^2 > 0$ donc $ac > b^2$ et par suite a et c sont de même signe qui est le signe de $a > 0$, donc $\lambda + \mu > 0$ et puisque $\lambda\mu > 0$ elles ont même signe positif celui de leur somme, donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ce qui entraîne d'après I - A.2, A est définie positive.

– **I-B.3** : Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tous $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\det(A^{(i)}) > 0$. On suppose que A n'est pas définie positive.

– (a) : D'après I - A.2, il existe j tel que $\lambda_j \leq 0$, je dis que $\lambda_j < 0$, si $\lambda_j = 0$, $\det(A) = \det(A^{(n+1)}) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

$\det(A) > 0$ donc $\prod_{i \neq j} \lambda_i < 0$, donc $\exists k$ tel que $\lambda_k < 0$, ce qui entraîne l'existence de deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ_j et λ_k respectivement.

– (b) : Soient $V_1, V_2 \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs propres orthonormaux associés aux deux valeurs propres λ_1, λ_2 strictement négatives de la question précédente. Notons a, b les dernières composantes de V_1 et V_2 respectivement.

Si $ab = 0$, alors l'un des deux vecteurs répond à la question, on obtient ${}^tV_1AV_1 = \lambda_1 \|V_1\|^2 = \lambda_1 < 0$ ou ${}^tV_2AV_2 = \lambda_2 \|V_2\|^2 = \lambda_2 < 0$.

Si $ab \neq 0$. La dernière composante du vecteur $V = bV_1 - aV_2$ est nulle et on a alors ${}^tVAV = b^2 {}^tV_1AV_1 + a^2 {}^tV_2AV_2 = b^2 \lambda_1 + a^2 \lambda_2 < 0$.

On conclut donc l'existence d'un vecteur $X \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ de dernière composante nulle qui vérifie ${}^tXAX < 0$.

– (c) : Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a ${}^tXAX = {}^tX_1A^{(n)}X_1 < 0$, ce qui contredit le fait que $A^{(n)}$ est définie positive.

– **I-C** : On a équivalence lorsque $n = 1$.

Lorsque $n \geq 2$, l'implication directe est toujours vraie, la réciproque est fautive grâce à l'exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans lequel on a $\det(A^{(i)}) = 0$ pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, mais $Sp(A) = \{0, -1, 1\}$, donc

A n'est pas définie positive.

– **I-D** : Je laisse cette question aux informaticiens

II-Étude d'une suite de polynômes

– **II-A** : facile à vérifier .

– **II-B** : On a $\det(P_n) = 2n$, donc $\deg(P_n^{(n)}) = 2n - n = n$.

Au voisinage de 1 on a $P_n \sim (X - 1)^n$, donc $P_n = (X - 1)^n + o((X - 1)^n)$, ce qui entraîne que $\frac{P_n^{(n)}(1)}{n!} = 1$, donc $P_n^{(n)}(1) = n!$.

– **II-C** : Des intégrations par parties successives entraînent que

$$(Q, L_n) = \frac{1}{n!} \int_0^1 Q P_n^{(n)} = \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k Q^k P_n^{(n-k-1)} \right]_0^1 + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 Q^{(n)} P_n, \text{ or } 0 \text{ et } 1 \text{ sont des racines de } P_n \text{ de}$$

multiplicité n , donc $P_n, P_n', \dots, P_n^{(n-1)}$ s'annulent en 0 et 1, ce qui rend le crochet nul, de plus $\deg(Q) \leq n - 1$, donc $Q^{(n)} = 0$ et par suite $(Q, L_n) = 0$.

– **II-D.1** : Une succession d'intégrations par parties amène à $I_n = \int_0^1 x^n (x - 1)^n dx =$

$$= -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (x-1)^{n-1} dx = \dots = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \int_0^1 x^{n+k} (x-1)^{n-k} dx = \dots = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n} dx.$$

$$\text{donc } I_n = \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

– **II-D.2** : d'intégrations par parties entraîne que $(L_n, L_n) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 P_n^{(n)} P_n^{(n)} = \frac{1}{(n!)^2} \left[\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k P_n^{(n+k)} P_n^{n-1-k} \right]_0^1 +$

$\frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^1 P_n^{(2n)} P_n$, or le crochet est nul par la même justification faite dans la question II - C, de plus

$$P_n^{(2n)} = (2n)!, \text{ ce qui entraîne que } (L_n, L_n) = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} I_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}.$$

– **II-E** : On a $\forall n > m, L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après la question II - C, $(L_n, L_m) = 0$.

De plus d'après la question précédente $\|L_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Ce qui entraîne que si on pose

$$K_n = \frac{L_n}{\|L_n\|} = \sqrt{2n+1} L_n, \text{ alors la famille } (K_n) \text{ répond à la question, et le coefficient dominant de } K_n \text{ est } \sqrt{2n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Le procédé de Schmidt assure l'unicité.

– **II-F** : $L_0 = 1, L_1 = 2X - 1, L_2 = 6X^2 - 6X + 1$ ce qui donne $K_0 = 1, K_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$ et $K_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

III-Matrices de Hilbert.

– **III-A.Étude de quelques propriétés de** H_n .

– **III-A.1** : $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

– **III-A.2** : Soit la fraction définie par $F(X) = \alpha \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{X+2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{X+n+1}$,

avec pour tout $k \in [[1, n+1]]$, a_k le résidu associé au pôle simple $-k$ donné par $a_k = \alpha \frac{-k(-k-1)\dots(-k-n+1)}{\prod_{j \neq k} (-k+j)} =$

$$(-1)^{n-k+1} \alpha \frac{(n-1+k)!}{((k-1)!)^2 (n+1-k)!}. \text{ On choisit } \alpha \text{ tel que } a_{n+1} = \alpha \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 1, \text{ c'est à dire } \alpha = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

L'opération élémentaire sur les colonnes de Δ_{n+1} donnée par $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k C_k$ amène à

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} & & F(0) \\ & \Delta_n & F(1) \\ & & \vdots \\ * & \dots & * & F(n) \end{vmatrix}, \text{ or } F(0) = F(1) = \dots = F(n-1) = 0,$$

$$\text{donc } \Delta_{n+1} = F(n) \Delta_n = \alpha \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \Delta_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \Delta_n.$$

– **III-A.3** : La relation de récurrence précédente conduit à $\Delta_n = \frac{((n-1)!(n-2)!\dots 1!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!\dots 3!2!} \Delta_1 = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$.

– **II-A.4** :

– $\det(H_n) = \Delta_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– La relation de récurrence $\det(H_{n+1}^{-1}) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4} \det(H_n^{-1}) = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \det(H_n^{-1})$ nous invite à utiliser une récurrence simple.

Pour $n = 1$, $\det(H_1^{-1}) = 1 \in \mathbb{N}$ et si on suppose que $\det(H_n) \in \mathbb{N}$, alors :

$$\det(H_{n+1}^{-1}) = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \det(H_n^{-1}) \in \mathbb{N}, \text{ ce qui établit la récurrence.}$$

– **III-A.5 :** Pour tout $k \in [[1, n]]$, $\det(H_n^{(k)}) = \det(H_k) = \Delta_k > 0$, donc d'après la question I-B, la matrice H_n est définie positive, de plus elle est symétrique, donc ses valeurs propres sont en nombre de n et $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

– **III-B :** Approximations au sens des moindres carrés.

– **III-B.1 :** $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de dimension finie, donc le théorème de la projection orthogonale assure que pour tout $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, il existe $p(f) = \Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} (\|Q - f\|) = d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|\Pi_n - f\|$.

– **III-B.2 :**

– $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\min_{Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} (\|Q - f\|) \geq \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} (\|Q - f\|)$, c'est à dire $\|\Pi_{n-1} - f\| \geq \|\Pi_n - f\|$ ce qui traduit la décroissance de la suite $(\|\Pi_n - f\|)_n$.

– On a $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, le théorème de Weistrass assure l'existence d'une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, la convergence uniforme précédente entraîne qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - P_{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

et par l'inégalité, $\|f - P_{n_0}\| = \left(\int_0^1 (f - P_{n_0})^2\right)^{1/2} \leq \|f - P_{n_0}\|_\infty$, on obtient $\|f - P_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si on pose $d_0 = \deg(P_{n_0})$, alors pour tout $n \geq \max(d_0, n_0)$, $\|f - \Pi_n\| \leq \|f - P_{n_0}\| + \|P_{n_0} - p(P_{n_0})\| + \|p(P_{n_0}) - p(f)\|$, or $P_{n_0} \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $p(P_{n_0}) = P_{n_0}$, de plus $\|p(P_{n_0}) - p(f)\| = \|p(P_{n_0} - f)\| \leq \|P_{n_0} - f\|$, ce qui entraîne que $\forall n \geq \max(n_0, d_0)$ $\|f - \Pi_n\| \leq 2\|P_{n_0} - f\| \leq \varepsilon$.

– **III-B.3 :** Posons $e_k(X) = X^{k-1}$, alors (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a

$(e_i, e_j) = \int_0^1 e_i e_j = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1} = (H_n)_{i,j}$, donc la matrice H_n est la matrice du produit scalaire (\cdot, \cdot) dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

– **III-B.4** Posons $\Pi_n = \sum_{j=0}^n a_j X^j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} X^{j-1}$.

On sait que $f - \Pi_n \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$, donc $\forall k \in [[1, n+1]]$ $(f - \Pi_n, X^{k-1}) = 0$, ce qui donne

$$(f, X^{k-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} (X^{j-1}, X^{k-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} (H_{n+1})_{k,j}, \text{ ce qui s'écrit } H_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, 1) \\ \vdots \\ (f, X^n) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\text{par suite } \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} (f, 1) \\ \vdots \\ (f, X^n) \end{pmatrix}.$$

– **III-B.5 :**

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

– **IV-A :** Somme des coefficients de H_n^{-1}

– **IV-A.1 :** $s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 9$, on conjecture que $s_n = n^2$.

– Le système en question est un système à n équations, n inconnus de matrice H_n qui est inversible, donc c'est un système de Cramer qui admet une solution unique.

– **IV-A.2** La solution unique du système est donnée par $\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\forall i \in [[0, n-1]]$

$$a_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n h_{i+1,j}^{(-1,n)}, \text{ ce qui donne en sommant sur les } i, \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_{i-1}^{(n)} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j}^{(-1,n)} = s_n.$$

– **IV-A.3** puisque $Q = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p X^p$, on aura $(S_n, Q) = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p (S_n, X^p)$, or en exploitant pour tout $p \in [[0, n-1]]$,

la $(p+1)$ ème ligne du système de la question IV-A.2 : (a), on obtient

$$(S_n, X^p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} (X^p, X^k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^{(n)}}{p+k+1} = 1, \text{ ce qui entraîne que } (S_n, Q) = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p = Q(1).$$

– **IV-A.4** En prenant $Q = S_n$ dans la relation précédente, on obtient $(S_n, S_n) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$, or puisque $(K_p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $(S_n, S_n) = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (S_n, K_p)^2$, et toujours d'après la relation précédente avec $Q = K_p$, on aura $(S_n, K_p) = K_p(1)$, ce qui donne finalement

$$s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2.$$

– **IV-A.5** : On a $K_p = \sqrt{2p+1}L_p$ avec $L_p(1) = 1$ on obtient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

– **IV-A.6** : $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = 2 \sum_{p=1}^{n-1} p + n = (n-1)n + n = n^2$.

– **IV-B** : Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

– **IV-B.1** : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2p}{p} = 2 \binom{2p-1}{p} \in 2\mathbb{N}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [[1, n]]$, un calcul simple conduit à $\binom{n+p}{p} \binom{n}{p} = \binom{2p}{p} \binom{n+p}{2p} \in 2\mathbb{N}$.

– **IV-B.2** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n = \sqrt{2n+1}L_n$ avec $L_n = \frac{1}{n!}(P_n^{(n)})$, or $(P_n)^{(n)} = (X^n(X-1)^n)^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{n+k}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k!} X^k$, ce qui donne $L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} X^k$, donc le coefficient constant de L_n est égale à $(-1)^n$ et tous les autres sont pairs grâce à la question précédente.

– **IV-B.3** :

– Soit $P = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ à la base orthonormée pour le produit scalaire (\cdot, \cdot) , $\mathcal{B}' = (K_0, K_1, \dots, K_{n-1})$. La matrice du produit scalaire (\cdot, \cdot) est H_n dans la base \mathcal{B} , respectivement I_n dans la base \mathcal{B}' et la formule de changement de bases s'écrit $I_n = {}^t P H_n P$, ce qui entraîne en inversant que $H_n^{-1} = P {}^t P$, or pour tout $j \in [[0, n-1]]$

$$K_j = \sqrt{2j+1} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j+k}{k} \binom{j}{k} X^k.$$

D'où pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $p_{i,j} = \sqrt{2j-1} (-1)^{j-i} \binom{j+i-2}{i-1} \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$ et $p_{i,j} = 0$ si $i > j$.

$$\text{Donc pour tout } i \in [[1, n]] \quad h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=i}^n p_{i,j}^2 = \sum_{j=i}^n (2j-1) \binom{j+i-2}{i-1}^2 \binom{j-1}{i-1}^2.$$

$$\text{En particulier pour } i = 1 \text{ et } i = n, \text{ on obtient } h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2 \text{ et } h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1) \binom{2n-2}{n-1}^2.$$

– Pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{k=\max(i,j)}^n p_{i,k} p_{j,k} =$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^n (2k-1) \binom{k+i-2}{i-1} \binom{k-1}{i-1} \binom{k+j-2}{j-1} \binom{k-1}{j-1}$$

Ce qui montre que les $h_{i,j}^{(-1,n)}$ sont des entiers comme produit d'entiers.

– Soient $i, j \in [[2, n]]$, donc pour tout $k \geq \max(i, j) \geq 2$, $i-1, j-1, k-1 \in \mathbb{N}^*$, et par suite d'après (IV-B.1), $\binom{k+i-2}{i-1} \binom{k-1}{i-1}$ et $\binom{k+j-2}{j-1} \binom{k-1}{j-1}$ sont pairs, donc leur produit est un multiple de 4, ce qui entraîne que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ qui est somme de ces produits est aussi un multiple de 4.
