ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE
DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1983

•••

MATHEMATIQUES

1ère ÉPREUVE

OPTIONS M, P' et T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I

LES CANDIDATS A L'OPTION T.A. N'ONT PAS A TRAITER LA PARTIE V

NOTATIONS ET CONVENTIONS

a) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désigneront respectivement l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des réels et des complexes. Si E est l'un de ces ensembles, E^* désignera le sous-ensemble $E \setminus \{0\}$.

b) L'ensemble des polynômes à une indéterminée X, sur le corps $\mathbb{C}$ sera désigné par $\mathbb{C}[X]$. Soit $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_p[X]$ sera le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à p.

c) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de nombres complexes ; soit $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; U_n^k désignera le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})$ où les a_{ij} sont définis par la relation :

$$\forall i, \forall j : 0 \leq i \leq k\ ,\ 0 \leq j \leq k\ ,\quad a_{ij} = u_{n+i+j}.$$

Cas particulier : $U_n^0 = u_n$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $D(0, a) = \{z \mid z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$.

e) Par convention, une fonction rationnelle sera une fonction f, définie dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ par la relation :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

. P et Q sont deux polynômes, appartenant à $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux

. 0 n'est pas racine de Q ($Q(0) \neq 0$).

Dans ces conditions, les racines du polynôme Q seront appelées pôles de f ; leur ensemble sera désigné par $\mathcal{P}(f)$; l'ordre d'un pôle α de f sera égal, par définition, à la multiplicité de la racine α du polynôme Q.

f) Par définition, une série entière de terme général $u_n z^n$ sera dite développement en série entière de la fonction rationnelle f dans le disque $D(0, a)$ $(a > 0)$ si :

$$\forall z \in D(0, a) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n .$$

Question préliminaire : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$; soit a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ un ensemble de n^2 nombres complexes ; soient A et a les matrices, d'ordre n et n-2 respectivement, définies par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad , \quad a = (a_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n-1}}$$

.../

Soient $D = \det A$, $d = \det a$; soit A_{ij} le coefficient de a_{ij} dans le calcul du déterminant D (cofacteur) ; en considérant le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,1} \\ A_{1,2} & 1 & 0 & \dots & 0 & A_{n,2} \\ A_{1,3} & 0 & 1 & \dots & 0 & A_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & A_{n,n-1} \\ A_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{vmatrix}$$

Montrer la relation : $D.D' = D^2.d = D.(A_{1,1}.A_{n,n} - A_{n,1}.A_{1,n})$;

En déduire : $D.d = A_{1,1}.A_{n,n} - A_{n,1}.A_{1,n}$.

PARTIE I

1° - Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$; soit f la fonction rationnelle :

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^p}$$

Montrer que, pour tout x réel appartenant à un intervalle ouvert, il vient :

$$f(x) = (-1)^p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!.(p-1)!} \frac{x^n}{\alpha^{n+p}}$$

Quel est le rayon de convergence R de la série entière obtenue ? Il sera admis, dans la suite, que plus généralement pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et, pour tout z du disque $D(0,|\alpha|)$, la valeur prise par f, f(z), est donnée par cette même relation.

2° - Soit $p \in \mathbb{N}^*$; montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{C}_p[X]$

$B = \{1, X+1, (X+1)(X+2), \dots, (X+1)(X+2)\dots(X+p)\}$ est une base de $\mathbb{C}_p[X]$.

3° - Soit $p \in \mathbb{N}^*$; soit P un polynôme de $\mathbb{C}_p[X]$ de degré p ; soit la série entière de terme général $P(n).z^n$, $n \in \mathbb{N}$; quel est le rayon de convergence a de cette série ?

En écrivant le polynôme P dans la base B de $\mathbb{C}_p[X]$ définie ci-dessus, calculer la somme S(z) de cette série dans le disque D(0, a) :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n).z^n$$

En déduire que cette série entière $P(n).z^n$ est le développement en série entière d'une fonction rationnelle g ; préciser g, son ensemble $\mathcal{P}(g)$ et le degré maximum du polynôme "numérateur" en supposant toujours les polynômes "numérateur" et "dénominateur" premiers entre eux.

.../

PARTIE II

1° - Soit f une fonction rationnelle ; soient α_i, ses pôles, $1 \leq i \leq r$; soit p_i l'ordre du pôle α_i ; montrer qu'il existe un réel a $(a > 0)$, tel que, pour tout z du disque $D(0, a)$, $f(z)$ soit égal à la somme d'une série entière de terme général $u_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n z^n$?

Montrer qu'il existe un entier n_o et des polynômes P_i, de degré $p_i - 1$, $1 \leq i \leq r$, tels que :

$$(C) \qquad \forall n > n_o \qquad u_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i(n)}{(\alpha_i)^n} .$$

2° - Soit, réciproquement, une série entière de terme général $u_n z^n$ $n \in \mathbb{N}$ telle qu'il existe des polynômes P_i, de degré $p_i - 1$, des nombres complexes α_i (tous différents de 0), $1 \leq i \leq r$, et un entier n_o pour lesquels la relation (C) est vérifiée ;

Préciser le rayon de convergence a de cette série entière ; en déduire que cette série entière est, dans le disque $D(0,a)$, le développement en série entière d'une fonction rationnelle.

PARTIE III

1° - Soit f une fonction rationnelle ; d'après la partie II, il existe un développement en série entière $u_n z^n$ $n \in \mathbb{N}$, dans un disque $D(0, a)$ $(a > 0)$. Déterminer un entier n_o, tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_o, les coefficients u_n vérifient une relation de récurrence linéaire.

<u>Indication</u> : Ecrire $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$; puis : $P(z) = Q(z). \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$.

Poser : $Q(z) = q_o + q_1 z + \dots + q_k z^k$.

2° - Soit $k \in \mathbb{N}^*$; une suite de nombres complexes u_n , $n \in \mathbb{N}$ sera dite vérifier la propriété (P), si :

$$(P) \qquad \exists\ (q_o, q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{C}^{k+1}, \quad q_o \neq 0, \quad q_k \neq 0 \text{ tels que}$$

$$\forall n \geq k \qquad q_o u_n + q_1 u_{n-1} + \dots + q_k u_{n-k} = 0.$$

a) Montrer, qu'il existe au moins une suite $u_n = \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$, ayant la propriété (P), où λ est un nombre complexe, racine d'un polynôme Q de degré k.

b) Montrer que, si λ est racine double de Q, la suite $v_n = n\,\lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$ vérifie aussi la propriété (P) ; généraliser brièvement ce résultat au cas d'une racine d'ordre p de Q $(p \geq 3)$.

c) En déduire que, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines de Q de multiplicité respectivement $p_1, p_2, \dots, p_r$, toute suite de nombres complexes u_n, $n \in \mathbb{N}$ ayant la propriété (P) s'écrit :

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\ (\lambda_i)^n$$

où P_i est un polynôme de degré $p_i - 1$.

3° - En déduire une réciproque de la question III - 1°.

.../

PARTIE IV

1° - Soit f la fonction rationnelle :

$$f(z) = \frac{z^5}{(z^4 - 1)^2}$$

Quels sont les pôles de f ? Déterminer le développement en série entière de f dans le disque D(O, 1).

2°) Soit la série entière de terme général $v_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$; les coefficients v_n sont définis par les relations :

$$v_o = 1 \ , \ v_1 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$

Déterminer le disque de convergence et la somme S(z)

PARTIE V

1° - Soit f une fonction rationnelle ; soit $(u_n z^n)$ $n \in \mathbb{N}$ son développement en série entière dans le disque D(O, a) (a > 0).

Montrer :

$$\exists \, (k, n_o) \in \mathbb{N}^2 : \forall n \geq n_o \quad U_n^k = 0.$$

Les U_n^k ont été définis à l'alinéa c du paragraphe "Notations et Conventions".

2° - Dans cette question, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignera une suite de nombres complexes, dont le terme général u_n n'est pas constamment nul à partir d'un certain rang.

Une suite de nombres complexes u_n, $n \in \mathbb{N}$, sera dite vérifier la propriété $(S^k_{n_o})$, où k et n_o sont des entiers, $(k, n_o) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, si :

$$\forall n \geq n_o \quad U_n^k = 0 \text{ et } U_n^{k-1} \neq 0.$$

a) Montrer que, si la suite u_n est stationnaire (c'est-à-dire $\exists \, n_o : \forall n \geq n_o \quad u_n = \ell$), la propriété $(S^1_{n_o})$ a lieu.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; soit $n \in \mathbb{N}$; montrer, à l'aide de la question préliminaire :

$$U_n^k . U_{n+2}^{k-2} = U_{n+2}^{k-1} . U_n^{k-1} - (U_{n+1}^{k-1})^2$$

c) Supposons :

$$\exists \, k \in \mathbb{N} \ , \ k \geq 2 \ ; \quad \exists \, n_o \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_o \quad U_n^k = 0.$$

Montrer que la nullité de $U_{n_1}^{k-1}$ pour $n_1 \geq n_o$ entraîne la nullité de U_n^{k-1} pour tout n supérieur ou égal à n_1.

d) Soit une suite pour laquelle $\exists \, (k_o \ , n_o) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_o, U_n^{k_o} = 0$, montrer qu'il existe deux entiers h et n_1 tels que la propriété $(S^h_{n_1})$ ait lieu.

e) Pour une suite vérifiant les hypothèses du d, montrer que le système linéaire :

$$\gamma_o \, u_n + \gamma_1 \, u_{n-1} + \ldots + \gamma_h \, u_{n-h} = 0$$
$$N + h \leq n \leq N + 2h$$

admet une seule solution telle que $\gamma_h = 1$. Les γ_i sont des nombres complexes inconnus et N vérifie $N \geq n_1$.

3° - En déduire, que pour qu'une série entière de terme général $u_n z^n$ $n \in \mathbb{N}$ soit, dans son disque de convergence, le développement en série entière d'une fonction rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres entiers k et n_o tels que $\forall n \geq n_o, U_n^k = 0$; $k \in \mathbb{N}$.