99 MATH. II - MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. .
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes définies et continues sur le segment I = [0, π]. Soit $\|.\|\_$ l'application qui, à toute fonction f de $\mathcal{E}$, associe le maximum du module de la fonction f sur l'intervalle I :

$$\|f\|\_ = \max_{0\leq x\leq \pi} |f(x)| .$$

Il est connu que l'espace $(\mathcal{E}, \|.\|\_)$ est un espace vectoriel normé.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des fonctions f, continûment dérivables, qui appartiennent à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, qui prennent la valeur 0 aux points 0 et π et dont l'intégrale du carré du module de la fonction dérivée f′ est majorée par 1.

$$\mathcal{F} = \{ f \mid f\in \mathsf{E} , f\in C^1(I), \int_0^\pi |f'(x)|^2\, dx \_ 1, f(0) = f(\pi) = 0 \} .$$

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions complexes f définies sur le segment I = [0, π] possédant la propriété : il existe une suite complexe $(b_n)_{n\_1}$, telle que

• la série de terme général $c_n = n^2 |b_n|^2$, n_1, est convergente et sa somme est majorée par 2/π,

• pour tout x réel de l'intervalle I, la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, n_1, est convergente et sa somme est égale à f(x).

$$\mathcal{G} = \Big\{ f \mid f \text{ est définie sur I, il existe une suite de nombres complexes } b_n,\ n\_1 \text{ telle que :}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |b_n|^2 \_ \frac{2}{\pi} \text{, pour tout réel x de I, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \Big\} .$$

Le but du problème est d'étudier d'une part les relations existant entre les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, d'autre part leurs propriétés.

Première partie

Résultats préliminaires.

I-1°) <u>Convergence de la série trigonométrique $b_n \sin(nx)$, n _ 1 :</u>

Soit une suite complexe $(b_n)_{n\_1}$ telle que la série de terme général $n^2 |b_n|^2$, n_1, soit convergente. Démontrer que la série de terme général b_n, n _ 1, est absolument convergente en utilisant par exemple l'inégalité :

pour deux réels positifs a et b, 2ab_ $(a^2 + b^2)$.

En déduire que l'ensemble $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$; $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$.

I-2°) <u>Un exemple de fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}$</u> :

a. En admettant le résultat classique : la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, n_1, est égale à $\frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme S de la série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$, k_0 : $$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

b. Soit h la fonction définie sur l'intervalle I par la relation : $h(x) = \min(x, \pi - x)$.
Soit h la fonction définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π, de restriction à l'intervalle I égale à la fonction h :

pour tout réel x, $h(-x) = -h(x)$, $h(x+2\pi) = h(x)$,

pour tout réel x de l'intervalle I, $h(x) = h(x)$.

i/ Montrer que la fonction h est continue ; déterminer sa série de Fourier ;

ii/ Quelle est la somme de la série de Fourier de la fonction h ? Retrouver la valeur de S calculée ci-dessus.

iii/ En déduire que la fonction k : x- $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ h(x) appartient à l'ensemble $\mathcal{G}$.

I-3°) <u>Égalité entre une fonction périodique et la somme de sa série de Fourier</u> :

Étant données deux fonctions complexes f et g, définies et continues sur la droite réelle, 2π-périodiques, il est admis que, si les coefficients de Fourier des fonctions f et g sont égaux, les deux fonctions f et g sont égales : l'égalité, pour tout entier relatif n, de $c_n(f)$ et de $c_n(g)$ implique l'égalité de f et de g.

Démontrer que, si f est une fonction complexe, définie et continue sur la droite réelle, 2π-périodique, dont la série de Fourier converge uniformément, la fonction f est alors égale à la somme de sa série de Fourier.

Deuxième partie

L'ensemble $\mathcal{F}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{G}$.

II-1°) Une fonction f de $\mathcal{F}$ est la somme d'une série trigonométrique :

Soit f une fonction donnée de l'ensemble $\mathcal{F}$.

a. Soit f la fonction, définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π, de restriction à l'intervalle I égale à la fonction f. Établir que cette fonction f est continûment dérivable sur la droite réelle.

b. En déduire l'existence d'une suite complexe $(b_n)_{n\_1}$ telle que, pour tout réel x de l'intervalle I, le réel f(x) soit égal à la somme de la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, n _ 1. Préciser la convergence de cette série.

II.2°) Inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$:

Soit f une fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$; démontrer que cette fonction f appartient aussi à l'ensemble $\mathcal{G}$. Est-ce que l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est stricte ?

Troisième partie

Densité du sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ pour la distance déduite de la norme de $\mathcal{E}$.
Le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ est compact.

III-1°) Densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$:

Soit g une fonction appartenant à $\mathcal{G}$; la fonction g est la somme d'une série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, n_1 ; soit g_p la somme des p premiers termes de cette série (p est un entier strictement positif) : $g_p(x) = \sum_{n=1}^{p} b_n \sin(nx)$.

Démontrer que pour tout entier p, p _ 1, la fonction g_p appartient au sous-ensemble $\mathcal{F}$. Établir que la fonction g est la limite dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ de la suite des fonctions g_p, p _ 1. En déduire que le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{G}$.

III-2°) Limite d'une suite convergente de fonctions appartenant à $\mathcal{G}$:

Soit $(f_r)_{r\in N}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble $\mathcal{G}$ qui converge dans $\mathcal{E}$ vers une fonction f. Par définition de $\mathcal{G}$, pour chaque fonction f_r, il existe une suite de nombres complexes $b_{r,\,n}$, n _ 1, tels que

- la série de terme général $n^2\,|b_{r,\,n}|^2$, n _ 1, est convergente ; sa somme est majorée par $\frac{2}{\pi}$;

• pour tout entier n, n _ 1, et tout réel x de I, $f_r(x)$ est la somme de la série de terme général $b_{r,\,n}\sin(nx)$, n _ 1 : $f_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{r,\,n}\sin(nx)$.

a. Démontrer que, pour tout entier n fixé, n _ 1, la suite $(b_{r,\,n})_{r\in N}$ est convergente et a une limite b_n, qui est le nombre complexe défini par la relation ci-dessous :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\ .$$

b. Établir que les nombres complexes b_n, n_1, définis ci-dessus ont la propriété : la série de terme général $n^2\,|b_n|^2$, n_1, est convergente ; sa somme vérifie l'inégalité suivante : $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,|b_n|^2$ _ $\frac{2}{\pi}$.

c. En déduire que la fonction f appartient à l'ensemble $\mathcal{G}$.

III-3°) <u>Adhérences des sous-ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$</u> :

Déterminer l'adhérence du sous-ensemble $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$; en déduire que $\mathcal{G}$ est fermé. Quelle est l'adhérence dans $\mathcal{E}$ du sous-ensemble $\mathcal{F}$?

III-4°) <u>Le sous-ensemble $\mathcal{G}$ est compact</u> :

a. Soit f une fonction appartenant au sous-ensemble $\mathcal{F}$. Démontrer, pour tout couple de réels x et y de l'intervalle I, vérifiant l'inégalité x_y, la relation :

$$|f(y) - f(x)|\ \_\ \sqrt{y - x}\ .$$

Utiliser, par exemple, l'expression de la différence f(y)–f(x) au moyen d'une intégrale.

b. Soit $(f_r)_{r\in N}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble $\mathcal{F}$; il est admis qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(r)})_{r\in N}$ qui converge simplement en tout point de l'intervalle I d'abscisse rationnelle : pour tout rationnel z (0_ z <π) $(f_{\varphi(r)}(z))_{r\in N}$ est une suite convergente.

Démontrer que la suite des fonctions $g_r = f_{\varphi(r)}$, r∈N, converge uniformément sur l'intervalle I.

c. En déduire que le sous-ensemble $\mathcal{G}$ est compact.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE