

## Préliminaires.

1. En notant  $Y = MX$ , il vient:

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| |x_j| \leq \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \leq \|X\|_\infty \|M\| \quad \text{pour tout } i \text{ de } 1 \text{ à } n.$$

Donc, par définition même du sup,  $\|MX\|_\infty \leq \|M\| \|X\|_\infty$ .  $\square$

2. a. L'application  $\varphi$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathbb{R}^d$  définie par  $\varphi(M) = \sum_{k=1}^d x_k e_k$  en notant  $(x_1, \dots, x_k)$  les composantes de  $M$  sur la base  $\mathcal{B}$  et  $(e_1, \dots, e_k)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  est clairement un isomorphisme d'espace vectoriel. Il en découle que  $\mathcal{N}$  est bien une norme sur  $\mathcal{M}$  "transférée" par  $\varphi^{-1}$  de la norme infinie de  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$
2. b. La restriction à  $\mathcal{M}$  de la norme  $\| \cdot \|$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est bien sûr une norme sur  $\mathcal{M}$ . Comme  $\mathcal{M}$  est de dimension finie, cette norme est équivalente à la norme  $\mathcal{N}$  de la question précédente d'où l'existence demandée.  $\square$
2. c. Comme toutes les normes sur  $\mathcal{M}$  sont équivalentes, dire que la suite  $(M_p)$  converge vers 0 c'est en particulier dire qu'elle converge vers 0 pour la norme  $\mathcal{N}$  d'où le résultat demandé.  $\square$

## Une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_I^\infty$ .

3. a. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $\ell - 1$  appliquée à  $f$  de  $\lambda$  vers  $x$  (ce qui est bien licite puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  donc a fortiori de classe  $\mathcal{C}^\ell$  sur  $I$  donc sur  $[\lambda, x]$  ou  $[x, \lambda]$ ) donne immédiatement le résultat demandé.  $\square$
3. b. De manière à ramener l'intervalle d'intégration au segment fixe  $[0, 1]$  on effectue le changement de variable (bien admissible car affine)  $u = \lambda + t(x - \lambda)$  ce qui fournit  $f(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$  avec :

$$(\ell - 1)! h(x) = \int_0^1 \underbrace{(1+t)^{\ell-1} f^{(\ell)}(\lambda + (x-\lambda)t)}_{g(x,t)} dt.$$

On a là une intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre et comme  $g$  est par théorèmes opératoires de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I \times [0, 1]$ , l'application itérée du théorème de dérivation sous le signe intégral (dans le cas d'un segment) prouve bien que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .  $\square$

4. a. Pour  $j$  de 1 à  $r$  et  $k$  de 0 à  $m_j - 1$ , remarquons qu'on a  $\Pi_A^{(k)}(\lambda_j) = 0$  par caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme. Par ailleurs la formule de dérivation de Leibniz fournit :

$$(h\Pi_A)^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{p=0}^k C_k^p h^{(k-p)}(\lambda_j) \underbrace{\Pi_A^{(p)}(\lambda_j)}_{=0 \text{ car } p \leq k} = 0.$$

Ainsi  $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$  pour tout  $j$  de 1 à  $r$  et tout  $k$  de 0 à  $m_j - 1$  i.e.  $f \stackrel{A}{\equiv} g$ .  $\square$

4. b. Supposons  $f \stackrel{A}{\equiv} g$ . Alors  $f(x) - g(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} h_1(x)$  avec  $h_1 \in \mathcal{C}^\infty(I)$  d'après la question 3.

Pour  $x \neq \lambda_1$  on a  $h_1(x) = \frac{1}{(x - \lambda_1)^{m_1}} \times (f - g)(x)$  et la formule de Leibniz prouve que  $h^{(k)}(\lambda_2) = 0$  pour  $k$  de 1 à  $m_2 - 1$  puisque  $(f - g)^{(p)}(\lambda_2) = 0$  pour  $p \leq m_2 - 1$ . La question 3 prouve alors que  $h_1(x) = (x - \lambda_2)^{m_2} h_2(x)$  avec  $h_2 \in \mathcal{C}^\infty(I)$  donc que  $f(x) - g(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} h_2(x)$ .

En écrivant que  $h_2(x) = \frac{1}{(x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2}} \times (f - g)(x)$  pour  $x \in I \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , on prouve de même que  $h_2(x) = (x - \lambda_3)^{m_3} h_3(x)$  avec  $h_3 \in \mathcal{C}^\infty(I)$  ...

L'itération est claire et ainsi il existe bien  $h = h_r \in \mathcal{C}^\infty(I)$  vérifiant  $f = g + h\Pi_A$ .  $\square$

En conclusion deux fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(I)$  coïncident sur le spectre de  $A$  si et seulement si il existe une fonction  $h \in \mathcal{C}^\infty(I)$  telle que  $f = g + h\Pi_A$ .

5. (2) implique (1) d'après la question 4.a. Réciproquement si  $P$  et  $Q$  coïncident sur le spectre de  $A$  alors  $P - Q$  est divisible par  $(X - \lambda_i)^{m_i}$  (caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine) donc par  $\Pi_A$  d'après le théorème de Gauss puisque les polynômes  $(X - \lambda_i)^{m_i}$  sont premiers entre eux deux à deux.  $\square$

## Définition de la matrice $f(A)$ .

6. L'application  $\varphi$  est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie  $m$ . Pour prouver qu'elle est bijective, il suffit donc de prouver qu'elle est injective. Or si  $P$  est un élément de son noyau, alors  $P$  est un polynôme de degré au plus  $m - 1$  admettant au moins  $m$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Il en découle que  $P$  est le polynôme nul.  $\square$

7.  $P_f$  répond à la question si et seulement si  $\varphi(P) = \left( (f^{(k_1)}(\lambda_1))_{0 \leq k_1 \leq m_1-1}, \dots, (f^{(k_r)}(\lambda_r))_{0 \leq k_r \leq m_r-1} \right) \stackrel{\text{DEF}}{=} X_{A,f}$ .  
D'où l'existence et l'unicité de  $P_f$  d'après la question précédente à savoir  $\varphi^{-1}(X_{A,f})$ .  $\square$

8. Supposons que  $f$  soit la fonction polynôme associée au polynôme  $P$ . Effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $\Pi_A : P = Q\Pi_A + R$ . Alors d'après la question 4 (ou 5) on a  $P \equiv R \pmod{A}$  i.e.  $f \equiv R \pmod{A}$  et comme le degré de  $R \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ , on a par la définition de la question 7 que  $f(A) = R(A)$ .

Or par le morphisme classique de l'algèbre des polynômes sur l'algèbre des matrices carrées, on a :

$$P(A) = Q(A) \underbrace{\Pi_A(A)}_{=0} + R(A) = R(A).$$

Ainsi on a bien  $f(A) = P(A)$ , ce qui est effectivement "naturel" !  $\square$

9. a. Un calcul immédiat montre que le polynôme caractéristique est  $\chi_A(X) = (X-1)^2$ . Donc le polynôme minimal qui le divise d'après le théorème de Cayley-Hamilton est  $X-1$  ou  $(X-1)^2$ . Or  $X-1$  n'annule pas  $A$  puisque  $A \neq I$ . Ainsi  $\Pi_A(X) = \chi_A(X) = (X-1)^2$ .  $\square$

9. b. Lorsque  $f(x) = ax + b$  on a d'après la question 8 que  $f(A) = aA + bI$  et on ne peut "faire mieux" puisque le polynôme  $aX + b$  est de degré inférieur à 2.  $\square$

• Lorsque  $f(x) = \sin(\pi x)$  on a  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = -\pi$  donc immédiatement  $P_f(X) = -\pi(X-1)$  de sorte que  $f(A) = -\pi(A-I)$ .  $\square$

• Lorsque  $f(x) = (x-1)^2 g(x)$  alors  $f(1) = f'(1) = 0$  de sorte que  $P_f(X) = 0$  et donc  $f(A) = 0$ .  $\square$

### Le calcul systématique de $f(A)$ .

10. Avec les notations précédentes nous avons, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ ,  $X_{A,f} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) E_{j,k}$  où  $E_{j,k}$

est le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indices  $j, k$  i.e. en d'autres termes  $E_{j,k}$  est l'image par  $\varphi$  d'une fonction  $f_{j,k}$  (par exemple un polynôme) telle que  $f_{j,k}^{(k)}(\lambda_j) = 1$  et  $f_{j,k}^{(p)}(\lambda_i) = 0$  pour tout couple  $(i, p)$  tel que  $1 \leq i \leq r$  et  $0 \leq p \leq m_i - 1$  et  $(i, p) \neq (j, k)$ .

Il en découle immédiatement l'existence et l'unicité des polynômes  $Q_{j,k}$  répondant à la question à savoir :

$$Q_{j,k} = \varphi^{-1}(E_{j,k}). \quad \square$$

11. En tant qu'image réciproque de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , la famille  $(Q_{j,k})$  est une base de  $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ .

Soit désormais une famille  $(\alpha_{j,k})$  de réels telle que  $\sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Z_{j,k} = 0$ . Cette relation s'écrit :

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Q_{j,k}(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} (\alpha_{j,k} Q_{j,k})(A) = 0.$$

Ainsi le polynôme  $\sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Q_{j,k}$  annule  $A$ . Comme il est de degré au plus  $m-1$  donc strictement inférieur au

dégré du polynôme minimal, il est nul. Il en résulte, puisque comme noté ci-dessus la famille des polynômes  $(Q_{j,k})$  est libre, que tous les coefficients  $\alpha_{j,k}$  sont nuls.

En conclusion la famille de matrices  $(Z_{j,k})$  est libre.  $\square$

Quant à la relation  $f(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ , c'est bien sûr une immédiate conséquence de la question 10.  $\square$

12.a. Comme  $\Pi_A(X) = (X-1)^2$  la question précédente prouve l'existence de deux matrices  $Z_1 \stackrel{\text{DEF}}{=} Z_{1,0}$  et  $Z_2 \stackrel{\text{DEF}}{=} Z_{1,1}$  telles que  $f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2$  pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  où  $I$  est un intervalle quelconque non réduit à un point contenant 1.  $\square$

12.b. En choisissant en particulier pour  $f$  la fonction constante égale à 1, il vient que  $Z_1 = I_2$ . Puis le choix  $f : x \mapsto x$  montre que  $Z_2 = A - I_2$ . Ainsi  $f(A) = f(1)I_2 + f'(1)(A - I_2)$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ .  $\square$

12.c. D'après la question 8, on a  $A^{2004}$  (au sens polynomial) qui est bien égal à  $f(A)$  avec  $f$  la fonction  $x \mapsto x^{2004}$ . Donc  $A^{2004} = f(A) = I_2 + 2004(A - I_2) = 2004A - 2003I_2$ .  $\square$

De même la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  pour  $\alpha > 0$  on a  $A^\alpha = I_2 + \alpha(A - I_2) = \alpha A + (1 - \alpha)I_2$ .  $\square$

13.a. En remplaçant la première colonne du polynôme caractéristique de  $A$  par elle-même plus la seconde on peut mettre  $X$  en facteur dans le polynôme caractéristique.

$$\text{Ainsi } \chi_A(X) = X \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & X+2 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X^2(X+1).$$

Il en découle que le polynôme minimal (qui le divise et a les mêmes racines) est soit  $X(X+1)$  soit  $X^2(X+1)$ .

Or  $A(A+1) \neq 0$  donc  $\Pi_A(X) = X^2(X+1) = X^2(X+1)$  n'est pas diagonalisable (ni sur  $\mathbb{R}$  ni sur  $\mathbb{C}$ ) puisque son polynôme minimal n'est pas à racines simples.  $\square$

**13.b.** Pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  intervalle quelconque contenant  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 0$ , nous avons  $f(A) = f(-1)Z_{1,0} + f(0)Z_{2,0} + f'(0)Z_{2,1}$ .  
La considération de  $f(x) = x^2$  fournit  $Z_{1,0} = A^2$ . En envisageant ensuite  $f(x) = 1$  il vient  $Z_{2,0} = I_3 - A^2$  et enfin  $f(x) = x$  fournit  $Z_{2,1} = A + A^2$ .  $\square$

### Un calcul fonctionnel sur la matrice $A$ .

**14.a.** L'application  $\psi$  de  $\mathcal{C}^\infty(I)$  dans  $\mathbb{R}^m$  qui à  $f$  associe  $X_{A,f}$  (défini à la question 7) est linéaire.

Or  $P_f = \varphi^{-1}(X_{A,f}) = \varphi^{-1} \circ \psi(f)$  donc l'application de  $\mathcal{C}^\infty(I)$  dans  $\mathbb{R}_{m-1}[X]$  qui à  $f$  associe  $P_f$  est linéaire.

On peut également remarquer que cette application est linéaire d'après la formule de la question 10 !

Ainsi  $P_{\alpha f} = \alpha P_f$  et  $P_{f+g} = P_f + P_g$ .  $\square$

**14.b.** D'après la question 4.b, il existe deux fonctions  $h_f$  et  $h_g$  de  $\mathcal{C}^\infty(I)$  telles que  $f = P_f + h_f \Pi_A$  et  $g = P_g + h_g \Pi_A$ .

Donc  $fg = P_f P_g + h \Pi_A$  avec  $h = P_f h_g + P_g h_f + h_f h_g \Pi_A \in \mathcal{C}^\infty(I)$ .

Ce qui prouve, d'après la question 4.a, que  $fg \equiv_A P_f P_g$ .

Or  $fg \equiv_A P_f P_g$  et comme la relation  $\equiv_A$  est clairement une relation d'équivalence, nous avons  $P_{fg} \equiv_A P_f P_g$  ce qui prouve, d'après la question 5, l'existence d'un polynôme  $H$  tel que  $P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A$ .  $\square$

**15.a.** D'après la question 14.a, nous avons  $S(\alpha f) = P_{\alpha f}(A) = (\alpha P_f)(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(f)$ .

De même  $S(f+g) = S(f) + S(g)$ .

En outre par la question 14.b et le morphisme classique de l'algèbre des polynômes sur celui des matrices carrées :

$$S(fg) \stackrel{\text{DEF}}{=} P_{fg}(A) = (P_f P_g + H \Pi_A)(A) = P_f(A) P_g(A) + H(A) \underbrace{\Pi_A(A)}_{=0} = P_f(A) P_g(A) = S(f) S(g).$$

Ainsi l'application  $S$  est bien un morphisme d'algèbres.  $\square$

**15.b.**  $f(A) = 0$  si et seulement si  $P_f(A) = 0$ . Or  $P_f$  étant de degré au plus  $m-1$  donc strictement inférieur au degré du polynôme minimal, ceci n'est réalisé que si  $P_f = 0$  donc si et seulement si  $f$  coïncide avec la fonction nulle sur le spectre de  $A$ . Le noyau de  $S$  est donc la sous-algèbre des fonctions de la forme  $h \Pi_A$  où est une fonction quelconque de  $\mathcal{C}^\infty(I)$ .  $\square$

**16.a.** Compte-tenu du morphisme précédent, on peut écrire :

$$\cos^2(A) + \sin^2(A) = S(\cos)^2 + S(\sin)^2 = S(\cos^2) + S(\sin^2) = S(\cos^2 + \sin^2) = S(1) = I_n. \quad \square$$

**16.b.** En supposant les  $\lambda_j > 0$  de sorte que  $\sqrt{A}$  ait un sens :

$$(\sqrt{A})^2 = S(f_1)^2 = S(f_1^2) = S(x \mapsto x) = A. \quad \square$$

En supposant les  $\lambda_j \neq 0$  de sorte que  $\frac{1}{A}$  ait un sens :

$$\frac{1}{A} A = f_2(A) A = S(f_2) S(x \mapsto x) = S(x \mapsto 1) = I_n \text{ de sorte que } \frac{1}{A} = A^{-1}. \quad \square$$

**17.** En tant qu'image de l'algèbre commutative  $\mathcal{C}^\infty(I)$  par le morphisme d'algèbres  $S$ ,  $\mathcal{M}_A$  est bien une sous-algèbre commutative de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Tout élément  $f(A)$  de  $\mathcal{M}_A$  s'écrivant (par définition) sous la forme  $P_f(A)$  où  $P_f$  est de degré au plus  $m-1$ , la famille  $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$  est génératrice. En outre cette famille est libre car si  $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} = 0$  alors le polynôme  $\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{m-1} X^{m-1}$  annule  $A$  donc est nul car de degré strictement inférieur à  $m$ , le degré du polynôme minimal.

En conclusion  $\mathcal{M}_A$  est une sous-algèbre commutative de  $M_n(\mathbb{R})$  de dimension  $m$ .  $\square$

REMARQUE : on peut aussi déduire directement la dimension de la question 11 !

**18. Première démonstration :** Soit  $B = f(A) = P_f(A)$  inversible. On sait (conséquence classique du théorème de Cayley-Hamilton) que  $B^{-1}$  est un polynôme  $Q(B)$ . Il en découle que  $B^{-1} = Q(P_f(A)) = (Q \circ P_f)(A)$  donc  $B^{-1}$  appartient bien encore à  $\mathcal{M}_A$ .  $\square$

*Seconde démonstration :* Soit  $B$  un élément inversible de  $\mathcal{M}_A$ . Alors l'application  $\psi$  de l'algèbre  $\mathcal{M}_A$  dans elle-même définie par  $\psi(M) = BM$  est clairement linéaire et injective puisque  $B$  est inversible. Donc elle est bijective puisque l'algèbre  $\mathcal{M}_A$  est de dimension finie. Comme  $I_n = 1(A) \in \mathcal{M}_A$ , il existe une matrice  $B' \in \mathcal{M}_A$  telle que  $BB' = I_n$ . Ainsi  $B^{-1} = B'$  appartient bien à  $\mathcal{M}_A$ .  $\square$

**19.** Nous avons  $f(A) = P_f(A)$ . Il en découle que l'ensemble des valeurs propres de  $f(A)$  est l'ensemble des  $P_f(\lambda_j)$  (classique résultat sur les valeurs propres d'un polynôme d'une matrice, qu'on obtient immédiatement en trigonalisant la matrice quitte à passer sur  $\mathbb{C}$ ). Or  $P_f(\lambda_j) = f(\lambda_j)$ .

Donc  $f(A)$  est inversible si et seulement si  $f(\lambda_j) \neq 0$  pour  $j$  de 1 à  $r$ .  $\square$

**20.** Nous avons montré dans la question précédente que  $\Lambda_{f(A)} = f(\Lambda_A)$ .  $\square$

## Application à la résolution d'un système différentiel.

**21.** Nous avons  $f_p(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} f_p^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$  pour tout entier  $p$  d'après la question 11. En outre les matrices  $Z_{j,k}$  forment une base de  $\mathcal{M}_A$  toujours d'après la question 11. En munissant  $\mathcal{M}_A$  de la norme infinie relative à cette base (toutes les normes y étant équivalentes) ou en utilisant la question 2.c, on voit que la suite de matrices  $(f_p(A))$  converge vers  $f(A)$  si et seulement si la suite de fonctions  $(f_p)$  converge vers  $f$  sur le spectre de  $A$ .  $\square$

**22.** Commençons par remarquer que comme  $f_t$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut bien envisager  $f_t(A)$  pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Fixons  $t \in \mathbb{R}$  et envisageons la suite de fonctions  $(S_p)$  définie par  $S_p(x) = \sum_{\ell=0}^p \frac{t^\ell}{\ell!} x^\ell$ .

Il vient alors (cours sur les séries entières) que pour tout entier  $k$  la suite  $(S_p^{(k)})$  converge localement normalement donc a fortiori simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f_t^{(k)}$ . En particulier la suite  $(S_p)$  converge vers  $f_t$  sur le spectre de  $A$ .

Il en découle d'après la question précédente que la suite de matrices  $(S_p(A))$  converge vers la matrice  $f_t(A)$ .

En d'autres termes la suite  $\left(\sum_{\ell=0}^p \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell\right)$  converge vers  $f_t(A)$  c'est à dire encore  $f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell \stackrel{\text{DEF}}{=} \exp(tA)$ .  $\square$

**23.** Avec des notations claires le système s'écrit  $X' = AX$  et (système différentiel linéaire à coefficients constants) sa solution générale est  $X = \exp(tA)X_0$  avec  $X_0 = X(0)$ .

On remarque que la matrice  $A$  est celle de la question 13 et ainsi nous avons (d'après les questions 13 et 22) :  $\exp(tA) = e^{-t}A^2 + (I_3 - A^2) + t(A + A^2)$ .

La solution générale est donc  $((e^{-t} + t - 1)A^2 + tA + I_3)X_0$ .  $\square$

\_\_\_\_\_ FIN \_\_\_\_\_