CENTRALE PC II 2001

BOURSE D'ECHANGES UPS

May 25, 2001

On notera B_c la base canonique de V . Une matrice A de L est alors la matrice d'un endomorphisme de V dans B_c.

1 Partie I: Etudes de quelques exemples

1.1 A

1.1.1 A

(x, y) dans $V \setminus \{0\}$. On complete respectivement x et y en des bases X et Y de V,(de premiers vecteurs x et y) et on considère l'endomorphisme f de V défini par : $\forall j \in [1, n] \quad f(x_j) = y_j$. Alors la matrice A de f dans la base B_c de V convient .

1.1.2 A

P_1 fausse , P_3 vraie $\Rightarrow P_2$ vraie , $P_4 \quad et \quad P_5$ vraies .

1.2 B

1.2.1 B

Pour tout T de $L \quad Te_n = (t_{n,n})e_n$. Par suite $W = vect(e_n)$ est un sous espave vectoriel non trivial L stable et P_6 est fausse .

1.2.2 B

Toutes les proprité $P_{i \in [1,5]}$ sont vraies .

1.3 C

1.3.1 C

On se place dans l'hypothèse où L est un sous espace vectoriel contenant I et ne contenant pas de matrice de rang 1 et avec $n = 2$. Alors pour tout élément A de L,et tout complexe μ, $A-\mu I$ est dans L de rang différent de 1 . Comme en dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$ toute matrice admet une valeur propre λ la matrice $A-\lambda I$ est de rang strictement inférieur à 2 et donc de rang nul . Conclusion : $A=\lambda I$.Comme réciproquement les matrices scalaires sont dans L , L est l'ensemble des homothéties vectorielles .

1.3.2 C

Si P_6 est vérifiée , comme toute droite est stable par une homothétie , on ne peut pas se trouver dans le cas précédent et P_1 est fausse .

On suppose désormais que L est une pseudo sous algèbre .

2 Partie II

Comme I est dans L , l'entier naturel m est bien défini.

2.1 A

Soit $F=\{Nz_1/N\in L\}$ Comme L est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, on vérifie aisément que F est lui même un sous espace vectoriel de V qui est L stable et distinct de $\{0\}$. Par suite P_6 donne $F=V$.
Un calcul avec le vecteur x_1 amène facilement à la caractérisation de la liberté de la famille (M_0,M_1)

2.2 B

$$M_0N_0(M_0(V))=M_0(N_0M_0(V))$$

Ce qui prouve , L étant une pseudo sous algèbre que $M_0(V)$ est un sous espace vectoriel non trivial M_0N_0 stable . Par suite il existe un vecteur propre (corsp de base $\mathbb{C}$ et dimension finie) de M_0N_0 dans ce sous espace .Ce qui correspond à l'affirmation:

$$\exists(\alpha,z)\in\mathbb{C}\times M_0(V)/z\neq 0 \quad et \quad M_0N_0z=\alpha z.$$

Comme $(M_0,N_0$) est libre ,$rg(M_1-\alpha M_0>0$.
Et on a aussi $Ker(M_0)\subset Ker(M_1-\alpha M_0)$ (inclusion stricte avec le résultat précédent) donc $rg(M_1-\alpha M_0<rg(M_0)$
L'élément M_1 est dans L et $M_1-\alpha M_0\neq 0$ aussi . Ce qui est absurde avec l'hypothèse faite sur m (qui intervient dans la liberté de la famille (M_0,M_1).
L'hypothèse $m\geq 2$ est donc fausse et on conclut que $m=1$.

3 Partie III

Hypothèse : $n>2, \quad dim(L)\geq n^2-1$

3.1 A

Soit W' un supplémentaire de W et B une base de V adaptée à $E = W \oplus W'$. m étant l'endomorphisme de V de matrice M dans la base canonnique de V alors

$$M(W) \subset W \Leftrightarrow mat_{Bc}(m) = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

où X, Y, Z sont des matrices arbitraires avec X carrée de taille $k = dim(W)$.

$$On \quad conclut \quad : dim\{M \in E \mid M(W) \subset W\} = k^2 + (n-k)n = n^2 - k(n-k)$$

. Comme par définition (P_5) L contient $\{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ cqui conduit à $n^2 - k(n-k) \geq n^1 - 1 \Rightarrow k = O \quad ou \quad k = n$.
Conclusion W est un sous espace vectoriel trivial de V

3.2 B

3.2.1 B

$dim(H) = 2 \quad dim(L) \geq n^2 - 1$ dans E de dimension n^2 . $H \; et \; L$ ne peuvent donc être supplémentaires et $dim(H \cap L) \geq 1$.
$E_{k,m}$ n'étant pas dans L ,pour un élément non nul $P = \alpha I + \beta E_{k,m}$ de $H \cap L$, $\alpha \neq = 0$: Conclusion P est inversible et dans L

3.2.2 B

$A = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1} \; + E_{n,1}$ est dans L et inversible .
La partie B prouve que dans tous les cas L contient une matrice inversible .

3.3 C

La famille $(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1)}$ comporte $n^2 + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n^2 . Elle est donc liée et avec deux coefficients de la combinaison linéaire non nuls .La combinaison s'écrit donc, en factorisant :
$A^r(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k A^k) = 0$ avec r entier , p entier non nul ,$\lambda_0 \lambda_p \neq O$. Par inversibilité de A , $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k A^k = 0$. $\lambda_0 \neq 0$ donne que I est une combinaison linéaire de $A^k \; avec \; k \geq 1$ donc est dans L .

3.4 D

Un orthogonal d'une partie est toujours un sous espace vectoriel (intersection de noyaux de formes linéaires)
$\forall z \in C_u \; \forall M \in L \; \forall^t \bar{J} u \in B_u \; : \; ({}^t\bar{M}\bar{z})^t \bar{J} u =^t \bar{z}({}^t\overline{JM} u = 0$ avec JM dans

L .C_u est L stable , Avec I dans L ,$B_u \neq \{0\}$ donc $C_u \neq V$ et avec P_6 (obtenue en A) :

$$C_u = B_u^{\perp} = \{O\} \quad et\ B_u = V$$

. $L^* = \{M^* =^{3/4} \bar{M}/M \in L\}$ vérifie les mêmes propriétés que L , et A joue par rapport à L^* le rôle de B par rapport à L . Donc $A_u = V$.
$v_0 \neq 0, w_0 \neq 0 \quad Av_O = V \Rightarrow \forall x \in V \setminus \{O\} \quad \exists J \in L\ quad \quad Jv_0 = x$ et
$Bw_O = V \Rightarrow \forall x \in V \setminus \{O\} \quad \exists M \in L\ quad \quad {}^t\bar{M}v_0 = y$.
Comme toute matrice de rang 1 peut s'écrire $R_1 = x^t\bar{y}$

$$R_1 = Jv_0^t\bar{w_0}M = JM_0M \in L$$

.
Conclusion : L contient donc tous les éléments de la base canonique et $L = E$.

$\boxed{\textbf{FIN PJ Centrale PC II 2001}}$