

A. Décomposition de Dunford

1) $P(X) = \prod_{i=1}^r P_i(X)$ et les $P_i(X)$ sont deux à deux premiers entre eux.

D'après le théorème de décomposition des noyaux : $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(f)) = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.

Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $P(f) = 0$. D'où $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.

2) $P_i \in \mathbb{C}[X]$, alors $F_i = \ker(P_i(f))$ est stable par f .

Pour tout $i \in [[1, r]]$, F_i n'est pas réduit à $\{0\}$, car λ_i est une valeur propre de f , et donc F_i contient au moins un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i .

Toute valeur propre de f_i est racine de P_i , et la seule racine de P_i est λ_i , alors la Polynôme caractéristique de f_i est de la forme : $(\lambda_i - X)^{\beta_i}$.

Pour chaque $i \in [[1, r]]$, soit B_i une base de F_i et A_i la matrice de f_i dans la base B_i .

La matrice de f dans la base $B = (B_1, \dots, B_r)$ adaptée à la somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,

est la matrice diagonale par blocs : $M = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$.

Le polynôme caractéristique de f est celui de M donné donc par : $P = \prod_{i=1}^r Q_i(X)$

avec Q_i le polynôme caractéristique de A_i , c'est à dire de f_i .

D'où $P = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{\beta_i} = \prod_{i=1}^r (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, mais les λ_i sont deux à deux distinctes, alors par

unicité des multiplicités des racines de P , on a : $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in [[1, r]]$.

Finalement : pour tout $i \in [[1, r]]$, le polynôme caractéristique de f_i est $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$.

3) Pour chaque $i \in [[1, r]]$, le polynôme caractéristique de f_i est $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, qui est en particulier scindé sur $\mathbb{C}$, donc f_i est trigonalisable, et il existe une base B_i de F_i dans laquelle la matrice de f_i est une matrice A_i triangulaire supérieure, et puisque la seule valeur propre de f_i est λ_i , A_i est de la forme : $A_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ avec N_i triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc N_i est nilpotente.

$B = (B_1, \dots, B_r)$ est une base de E , adaptée à la somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.

La matrice de f dans cette base est $M = \text{diag}(A_1, \dots, A_r) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$.

D'où A est semblable à une matrice $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$.

où $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in [[1, r]]$.

en particulier il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que : $P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}.$

4) Sous les notations de la question précédente, on pose :

$D' = \text{diag}(\lambda_1 I_{\alpha_1}, \dots, \lambda_r I_{\alpha_r})$ qui est une matrice diagonale par blocs, et diagonale.

$N' = \text{diag}(N_1, \dots, N_r)$ qui est diagonale par blocs et nilpotente. ($N'^n = \text{diag}(N_1^n, \dots, N_r^n) = 0$)

et on a : $A = P(D' + N')P^{-1} = D + N$ où $D = PD'P^{-1}$ qui est une matrice diagonalisable, et

$N = PN'P^{-1}$ qui est nilpotente, puisque : $N^n = PN'^nP^{-1} = 0$.

Il reste juste à vérifier que $DN = ND$.

Remarquons d'abord que $D'N' = N'D'$. (faire le produit par blocs)

$$DN = PD'P^{-1}PN'P^{-1} = PD'N'P^{-1} = PN'D'P^{-1} = PN'P^{-1}PD'P^{-1} = ND.$$

N.B :

La décomposition $A = D + N$, ci dessus est dite la décomposition de Dunford de la matrice A .

On admettra dans la suite que les matrices D et N sont uniques et ne dépendent que de A .

5) Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \ ; \ C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} (2-\lambda)^2(1-\lambda).$$

a) Cherchons $E_2(A)$ le sous espace propre de A associé à la valeur propre 2.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2x + z = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E_2(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Cherchons $\ker((A - 2I_3)^2)$.

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ker((A - 2I_3)^2) \text{ est le plan d'équation } x = y \text{ et donc } \ker((A - 2I_3)^2) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cherchons $E_1(A)$ le sous espace propre de A associé à la valeur propre 1.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = x \\ 2x + z = y \\ x - y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}.$$

$$E_1(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Posons alors } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On a : } A = PTP^{-1}.$$

$$\text{Selon l'étude précédente on a : } D = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } N = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{Tout calcul fait : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B. Commutation et conjugaison

Pour toutes matrices B de $M_n(\mathbb{C})$ et P de $GL_n(\mathbb{C})$, on note $comm_B$ et $conj_P$ les endomorphismes

$$\text{de } M_n(\mathbb{C}) \text{ définis par : } \forall X \in M_n(\mathbb{C}) ; \begin{cases} comm_B(X) = BX - XB \\ conj_P = PXP^{-1} \end{cases}.$$

On se propose dans cette partie de démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable si et seulement si $comm_A$ est diagonalisable.

6) Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $A, X \in M_n(\mathbb{C})$.

$$conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P(X) = conj_{P^{-1}} \circ comm_A(PXP^{-1}) = conj_{P^{-1}}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)$$

$$conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P(X) = P^{-1}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)P = P^{-1}APX - XP^{-1}AP = comm_{P^{-1}AP}(X)$$

D'où : $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P = \text{comm}_{P^{-1}AP}$

7) Soit A une matrice diagonale : $A = \sum_{k=1}^n \mu_k E_{k,k}$.

$\forall i, j \in [[1, n]]$; $AE_{ij} = \mu_i E_{i,i} E_{ij} = \mu_i E_{ij}$; $E_{ij}A = E_{ij} \mu_j E_{j,j} = \mu_j E_{ij}$; $\text{comm}_A(E_{ij}) = (\mu_i - \mu_j)E_{ij}$.
D'où $\forall i, j \in [[1, n]]$; E_{ij} est un vecteur propre de comm_A associé à la valeur propre $(\mu_i - \mu_j)$.
 $(E_{ij})_{i,j \in [[1, n]]}$ est une base de vecteurs propres de comm_A , alors comm_A est diagonalisable et son spectre est $\text{sp}(\text{comm}_A) = \{\lambda - \mu \text{ tq } \lambda, \mu \in \text{sp}(A)\}$.

8) On suppose ici que A est diagonalisable, il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que : $A = PDP^{-1}$; D'après 6) $\text{comm}_A = \text{conj}_P \circ \text{comm}_D \circ \text{conj}_{P^{-1}}$.

conj_P est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ et $(\text{conj}_P)^{-1} = \text{conj}_{P^{-1}}$.

De plus d'après la question précédente, comm_D est diagonalisable.

D'où comm_A est diagonalisable.

9) On suppose que A est nilpotente, donc il existe un entier non nul k tel que : $A^k = 0$.

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_A(X) = AX - XA$; $\text{comm}_A^2(X) = A(AX - XA) - (AX - XA)A = A^2X - 2AXA + XA^2$.

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, on montre que : $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_A^p(X) = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_p^j A^{p-j} X A^j$.

Cette formule est vraie pour $p = 1$. soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que l'égalité ci dessus est vérifiée.

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_A^{p+1}(X) = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_p^j A^{p+1-j} X A^j - \sum_{j=0}^p (-1)^j C_p^j A^{p-j} X A^{j+1}$

$\text{comm}_A^{p+1}(X) = A^{p+1-j} X + \sum_{j=1}^p (-1)^j C_p^j A^{p+1-j} X A^j + \sum_{j=1}^p (-1)^j C_p^{j-1} A^{p+1-j} X A^j + (-1)^{p+1} X A^{p+1}$

$\text{comm}_A^{p+1}(X) = A^{p+1-j} X + \sum_{j=1}^p (-1)^j (C_p^j + C_p^{j-1}) A^{p+1-j} X A^j + (-1)^{p+1} X A^{p+1}$

comme $C_p^j + C_p^{j-1} = C_{p+1}^j$, on obtient le résultat cherché :

$\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_A^p(X) = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_p^j A^{p-j} X A^j$.

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_A^{2k}(X) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_{2k}^j A^{2k-j} X A^j = 0$ (car $\forall j \in [[0, 2k]]$; $j \geq k$ ou $(2k - j) \geq k$).

comm_A^{2k} est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

Finalement : comm_A est nilpotent dès que A est nilpotente.

10) On suppose que A est nilpotente et que comm_A est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $AX = XA$. Posons $A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} E_{k,l}$.

$\forall i, j \in [[1, n]]$; $AE_{ij} = E_{ij}A = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l}$.

Comme $(E_{ij})_{i,j \in [[1, n]]}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$, pour $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$, alors A est une matrice diagonale, et comme A est nilpotente, on déduit que A est nulle.

11) Posons $A = D + N$, avec D diagonalisable et N nilpotente et $DN = ND$.

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_A(X) = AX - XA = DX - XD + NX - XN = \text{comm}_D(X) + \text{comm}_N(X)$.

$\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$.

comm_D est diagonalisable d'après 8) et comm_N est nilpotente d'après 9).

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_D \circ \text{comm}_N(X) = D(NX - XN) - (NX - XN)D = DNX - DXN - NXD - XND$

Comme $ND = DN$; $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_D \circ \text{comm}_N(X) = NDX - NXD - DXN - XDN$

$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\text{comm}_D \circ \text{comm}_N(X) = N(DX - XD) - (DX - XD)N = \text{comm}_N \circ \text{comm}_D(X)$.

D'où la décomposition de Dunford de comm_A est $\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$.

conclusion :

comm_A est diagonalisable si et seulement si comm_N est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

alors d'après 10) on a :

comm_A est diagonalisable si et seulement si $N = 0$ si et seulement si $A = D$ est diagonalisable.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Ici E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et b une forme bilinéaire symétrique sur E .

Pour tout sous espace vectoriel F de E , on appelle orthogonal de F relativement à b , le

sous espace vectoriel de E défini par : $F^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall y \in F ; b(x, y) = 0\}$.

On suppose que b est non dégénérée, c'est à dire que $E^\perp = \{0\}$.

12) Soit u un endomorphisme de E . Démontrons les implications suivantes :

(i) u est diagonalisable $\Rightarrow$ (ii) $\ker(u) = \ker(u^2)$ $\Rightarrow$ (iii) $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soient B une base de E formée de vecteurs propres de u , et A la matrice de u dans cette base. Puisque A est diagonale, alors A et A^2 ont le même rang qui est le nombre d'éléments non nuls sur leurs diagonales.

$\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$ alors d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2))$.

et puisque $\ker(u) \subset \ker(u^2)$, alors : $\ker(u) = \ker(u^2)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$, et soit $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$.

Il existe $x \in E$ tel que : $y = u(x)$ et $u(y) = u^2(x) = 0$, alors $x \in \ker(u^2) = \ker(u)$ et $y = u(x) = 0$.

Soit F un sous espace vectoriel de E , de dimension q , et soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ une base de F .

Pour tout $i \in [[1, q]]$, on note φ_i la forme linéaire définie sur E par : $\forall x \in E ; \varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

13) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{C}$ tels que : $\sum_{i=1}^q \alpha_i \varphi_i = 0$.

$$\forall x \in E ; \sum_{i=1}^q \alpha_i \varphi_i(x) = 0 = \sum_{i=1}^q \alpha_i b(\varepsilon_i, x) = b\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_i, x\right)$$

b est non dégénérée alors $\sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_i = 0$ et puisque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ est libre, alors : $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$.

On complète en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ de E^* est on note $(e_1, \dots, e_p)$ sa base antiduale.

14) Soit $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in E^*$. puisque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ est une base de F , on a :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F ; b(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [[1, q]] ; b(\varepsilon_i, x) = 0 = \varphi_i(x) = x_i$$

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [[1, q]] ; x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \text{vect}(e_{q+1}, \dots, e_p).$$

Finalement $F^\perp = \text{vect}(e_{q+1}, \dots, e_p)$ est de dimension $(p - q)$ et $\dim(F) + \dim(F^\perp) = p$.

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si

$$\ker(\text{comm}_A) = \ker((\text{comm}_A)^2).$$

15) C'est clair que l'application $[(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)]$ est une forme bilinéaire symétrique sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'elle est non dégénérée.

Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall Y \in M_n(\mathbb{C}) ; \text{tr}(XY) = 0$.

Posons : $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $Y = X^* = {}^t \bar{X}$.

$$\text{tr}(XX^*) = 0 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |x_{ij}|^2, \text{ alors } \forall i, j \in [[1, n]] ; x_{ij} = 0 \text{ et } X \text{ est la matrice nulle.}$$

16) Soient $X \in \ker(\text{comm}_A)$ et $Y \in \text{Im}(\text{comm}_A)$, il existe $Z \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $Y = AZ - ZA$.

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}(XAZ - XZA) = \text{tr}(XAZ) - \text{tr}(XZA).$$

comme $\text{tr}(XZA) = \text{tr}(ZAX)$ et $AX = XA$ alors : $\text{tr}(XZA) = \text{tr}(ZXA) = \text{tr}(XAZ)$. D'où $\text{tr}(XY) = 0$.

$$\text{Im}(\text{comm}_A) \subset (\ker(\text{comm}_A))^\perp.$$

D'après le théorème du rang et d'après la question 14) on a :

$$\dim(\text{Im}(\text{comm}_A)) = \dim((\ker(\text{comm}_A))^\perp) = n^2 - \dim(\ker(\text{comm}_A)).$$

D'où l'égalité : $\text{Im}(\text{comm}_A) = (\ker(\text{comm}_A))^\perp$.

17) On suppose que A est nilpotente, Soit $Y \in \ker(\text{comm}_A)$, alors $AY = YA$.

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^k = 0$, alors : $(AY)^k = A^k Y^k = 0$, alors AY est nilpotente, et $\text{tr}(AY) = 0$.

Alors $A \in (\ker(\text{comm}_A))^\perp = \text{Im}(\text{comm}_A)$, c'est à dire il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $A = \text{comm}_A(X)$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} ; \text{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = \text{comm}_A(X) = A.$$

Soient D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A .

18) D'après 3) il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que : $P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

avec $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, pour tout $i \in [[1, r]]$.

D'après 17) $\forall i \in [[1, r]] ; \exists X_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que : $\text{comm}_{\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i}(X_i) = N_i$.

On a $N' = \text{diag}(N_1, \dots, N_r)$; $D' = \text{diag}(\lambda_1 I_{\alpha_1}, \dots, \lambda_r I_{\alpha_r})$ et posons $X' = \text{diag}(X_1, \dots, X_r)$.

$\text{comm}_{A'}(X') = N'$. Or $N' = P^{-1}NP$ et posons : $X = PX'P^{-1}$. Alors

$\text{comm}_{P^{-1}AP}(P^{-1}XP) = P^{-1}NP$, c'est à dire : $\text{comm}_A(X) = N$.

19) Si A est diagonalisable, alors d'après 8) comm_A l'est aussi et donc d'après 12)

$$\ker(\text{comm}_A) = \ker((\text{comm}_A)^2).$$

Supposons réciproquement que $\ker(\text{comm}_A) = \ker((\text{comm}_A)^2)$.

Encore d'après 12) $\ker(\text{comm}_A) \cap \text{Im}(\text{comm}_A) = \{0\}$.

$$N = \text{comm}_A(X) \in \text{Im}(\text{comm}_A).$$

Comme $ND = DN$, alors $\text{comm}_A(N) = 0$ et $N \in \ker(\text{comm}_A) \cap \text{Im}(\text{comm}_A) = \{0\}$.

Finalement $A = D$ est une matrice diagonalisable.