

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,  
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,  
ECOLE POLYTECHNIQUE  
(OPTION T.A.)

\*\*\*

CONCOURS D'ADMISSION 1987

✱

MATHEMATIQUES  
2ème EPREUVE  
OPTION M

(Durée de l'épreuve 4 heures)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions  $f$ , à valeurs réelles ou complexes, continues sur  $[0, +\infty[$ .  
Pour tout réel  $a > 0$ , on pose :  $N_a(f) = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|$ .

$\mathcal{L}(E)$  désigne l'algèbre des endomorphismes de  $E$ . Pour tout élément  $U$  de  $\mathcal{L}(E)$ , on convient que  $U^0 = I$  (application identique de  $E$ ) et on définit  $U^n$  pour  $n$  entier naturel non nul par  $U^{p+1} = U \circ U^p$  où  $0 \leq p \leq n-1$ . On note plus simplement  $V \circ U$  le composé  $VoU$  de deux éléments  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{L}(E)$ . On désigne par  $T$  l'endomorphisme de  $E$  qui, à tout élément  $f$  de  $E$ , associe la fonction  $Tf$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$\text{la relation : } Tf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Pour tout polynôme  $P = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n$ , à coefficients réels ou complexes, on pose :

$$P(T) = \sum_{n=0}^p \alpha_n T^n.$$

On rappelle que l'application  $P \rightarrow P(T)$  est un morphisme de l'algèbre  $\mathbb{C}[X]$  dans l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .

Dans ce problème, on se propose d'étudier les endomorphismes  $P(T)$  et, plus généralement, des endomorphismes de la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$  pour des suites  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  convenables, ce qui fait l'objet des parties II, III et IV. La première partie introduit l'espace des suites  $(\alpha_n)$  utilisées dans le cours du problème.

### I - Etude d'un espace de suites.

On désigne par  $\mathcal{S}$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de toutes les suites  $A = (\alpha_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels ou complexes. On munit  $\mathcal{S}$  de la loi de multiplication qui, à tout couple de suites  $A = (\alpha_n)$  et  $B = (\beta_n)$ , associe la suite  $A * B = (\gamma_n)$  définie par :  $\gamma_n = \sum_{p+q=n} \alpha_p \beta_q$ . Il est immédiat que, muni de cette multiplication, le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}$  prend la structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre associative et commutative. On vérifiera que cette algèbre possède un élément unité. L'algèbre des polynômes s'identifie alors à la sous-algèbre des suites  $(\alpha_n)$  où  $\alpha_n = 0$  à partir d'un certain rang.

Enfin, on désigne par  $\mathcal{B}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$  constitué des suites  $(\alpha_n)$  telles que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$  soit égal à  $+\infty$ .

I.1. Soit  $(\lambda_n)$  une suite telle que, pour tout  $n$ ,  $|\lambda_n| \leq C k^n$  où  $C$  et  $k$  sont deux réels donnés strictement positifs. Montrer que  $(\lambda_n)$  est un élément de  $\mathcal{B}$ .

I.2. Montrer qu'une suite  $(\alpha_n)$  appartient à  $\mathcal{B}$  si et seulement si, pour tout nombre réel  $\rho > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_n|}{n!} \rho^n = 0.$$

- 2 -

I.3. Prouver que si A et B sont deux éléments de  $\mathcal{B}$ , alors  $A+B$  est aussi un élément de  $\mathcal{B}$ .

I.4. Pour tout nombre réel  $b > 0$ , on note  $\mathcal{E}_b$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$  constitué des suites

$A = (\alpha_n)$  telles que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$  soit supérieur ou égal à  $b$  ; pour tout nombre réel  $x$  tel que  $|x| < b$ , on pose alors  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ .

a) Montrer que  $\mathcal{E}_b$  est inclus dans  $\mathcal{B}$ . Réciproquement, tout élément de  $\mathcal{B}$  appartient-il à l'un au moins des sous-espaces vectoriels  $\mathcal{E}_b$  ?

b) Prouver que si A et B appartiennent à  $\mathcal{E}_b$ , il en est de même pour  $A \cdot B$ .

II. Construction d'opérateurs associés à T.

II.1. Soient  $f$  un élément de  $E$  et  $n$  un entier naturel non nul.

a) Prouver que, pour tout nombre réel  $x \geq 0$  :

$$(1) \quad T^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x u^{n-1} f(x-u) du$$

b) Montrer que, pour tout nombre réel  $a > 0$  :

$$(2) \quad N_a(T^n f) \leq \frac{a^n}{n!} N_a(f).$$

II.2. Soit  $A = (\alpha_n)$  un élément de  $\mathcal{B}$ .

a) Montrer que, pour tout élément  $f$  de  $E$ , la série de fonctions  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n f$  est normalement convergente sur tout intervalle  $[0, a]$ . On désigne par  $A(T)f$  la somme de cette série et, pour tout entier  $p \geq 0$ ,  $A_p(T)f$ , la somme partielle  $\sum_{n=0}^p \alpha_n T^n f$ .

b) Etablir que l'application  $f \mapsto A(T)f$  est un endomorphisme de  $E$ .

c) Pour tout nombre réel  $\rho > 0$ , on pose :  $\hat{A}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{n!} \rho^n$ . Prouver que, pour tout réel strictement positif  $a$  et pour tout élément  $f$  de  $E$ , on a :

$$(3) \quad N_a(A(T)f) \leq \hat{A}(a) N_a(f).$$

d) Montrer que, pour tout élément  $f$  de  $E$ , on a :

$$(4) \quad N_a(A(T)f) \leq \hat{A}(a) N_a(f).$$

II.3. Montrer que, pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments de  $\mathcal{B}$ , on a :

$$(4) \quad (A \cdot B)(T) = A(T) B(T)$$

(On pourra commencer par établir cette relation lorsque  $A$  est un monôme  $X^k$ ).

II.4. Prouver, pour tout élément  $A = (\alpha_n)$  de  $\mathcal{B}$ , pour tout élément  $f$  de  $E$  et pour tout réel  $x \geq 0$ , la relation :

$$(5) \quad A(T) f(x) = \alpha_0 f(x) + \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} t^n \right) f(x-t) dt.$$

II.5. Soit  $f$  un élément non nul de  $E$  à valeurs réelles positives.

a) Montrer que, pour  $n \geq 2$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} T^n f(x) = +\infty$ .

A cet effet, on pourra considérer un intervalle  $[a, b]$  où  $f(x) > k$ ,  $k$  étant strictement positif, et établir que, pour tout réel  $x \geq b$ , on a :

$$T^n f(x) \geq \frac{k(b-a)}{(n-1)!} (x-b)^{n-1}.$$

- b) En déduire que, si  $A$  est un élément de  $\mathcal{B}$  distinct d'un polynôme, alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n f$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, +\infty[$ .

III. Etude des opérateurs  $A(T)$ .

III.1. Etude de  $T$ .

- a) Déterminer le noyau et l'image de  $T$ .  
 b) Déterminer les valeurs propres de  $T$ .  
 c) Soient  $\mu$  un nombre complexe non nul et  $R_\mu$  la suite  $(\mu^n)$ . Calculer le rayon de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^n$  et sa somme  $R_\mu(x)$ . Prouver que l'endomorphisme  $I - \mu T$  est inversible dans  $\mathcal{L}(E)$  et que :  $(I - \mu T)^{-1} = R_\mu(T)$ .  
 d) En déduire que, pour tout élément  $g$  de  $E$ , l'équation  $(I - \mu T) f = g$  admet une solution  $f$  dans  $E$  et une seule et prouver que, pour tout  $a > 0$ ,  $N_a(f) \leq e^{|\mu|a} N_a(g)$ . Exprimer  $f$  en fonction de  $g$  grâce à la relation (5).  
 e) Retrouver les résultats de la question d) en ramenant l'équation  $(I - \mu T) f = g$  à une équation différentielle satisfaite par  $F = Tf$ .

III.2. Etude des endomorphismes  $P(T)$ .

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ .

- a) Prouver que, si  $P(0) \neq 0$ , l'endomorphisme  $P(T)$  est inversible dans  $\mathcal{L}(E)$ .  
 (On pourra se ramener au cas étudié dans la question III.1.c).  
 b) Déterminer le noyau et l'image de  $P(T)$  lorsque  $P(0) = 0$ .

III.3. Etude des endomorphismes  $I - T U(T)$ .

Soit  $U$  un élément de  $\mathcal{B}$ .

- a) Montrer que, pour tout élément  $f$  de  $E$ , la série  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n (U(T))^n f$  est normalement convergente sur tout intervalle  $[0, a]$  où  $a$  est un réel strictement positif.  
 b) On note  $R_U(T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n (U(T))^n$  l'endomorphisme de  $E$  ainsi défini. Prouver que, pour tout  $a > 0$  :  

$$N_a(R_U(T) f) \leq \exp[a \hat{U}(a)] N_a(f).$$
  
 c) Etablir que l'endomorphisme  $I - T U(T)$  est inversible dans  $\mathcal{L}(E)$  et que :

$$(I - T U(T))^{-1} = R_U(T).$$

III.4. Etude des opérateurs  $A(T)$ .

Soit  $A = (\alpha_n)$  un élément de  $\mathcal{B}$ ; on suppose qu'il existe un entier  $n \neq 0$  tel que  $\alpha_n \neq 0$ .

- a) Prouver que l'endomorphisme  $A(T)$  est inversible dans  $\mathcal{L}(E)$  si et seulement si  $\alpha_0 \neq 0$ .  
 b) Déterminer le noyau et l'image de  $A(T)$  lorsque  $\alpha_0 = 0$ .  
 c) Déterminer les valeurs propres de  $A(T)$ .

- 4 -

IV. Etude de l'opérateur exp(T).

On pose  $\exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$ . Alors, pour tout élément  $f$  de  $E$  et pour tout nombre réel  $x \geq 0$ , on a :

$$\exp(T) f(x) = f(x) + \int_0^x H(x-t) f(t) dt$$

$$\text{où } H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)!}.$$

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de  $H$  au voisinage de  $+\infty$  et d'en déduire celui de  $\exp(T) f$ .

IV.1. Comportement asymptotique de  $H$ .

On rappelle que :  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

a) Montrer que  $H$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-k} H(t) = +\infty.$$

b) Prouver que, pour tout nombre réel  $t > 0$  :

$$H(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{t}} \int_0^{\pi} \cos u \cdot \exp[2\sqrt{t} \cos u] du.$$

c) On pose :  $I(t) = \int_0^{\pi/2} \cos u \exp[2\sqrt{t} \cos u] du.$

Effectuer le changement de variable  $v = 1 - \cos u$ .

Etablir qu'il existe un nombre réel  $k > 0$  tel que, pour tout élément  $v$  de  $[0, 1]$  :

$$\left| \frac{(1-v)}{\sqrt{1-\frac{v}{2}}} - 1 \right| \leq k v.$$

En déduire que, au voisinage de  $+\infty$  :

$$I(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-1/4} e^{2\sqrt{t}}.$$

d) Prouver finalement que, au voisinage de  $+\infty$  :

$$H(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/4} e^{2\sqrt{t}}.$$

IV.2. Comportement de  $\exp(T) f$ .

Soit  $f$  une fonction de  $E$ , à valeurs réelles positives ou nulles, admettant une limite  $l \neq 0$  en  $+\infty$ .

Déterminer la partie principale de  $\exp(T) f(x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

(On pourra commencer par étudier le cas particulier où  $f = 1$ ).

\*\*\*