

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier ≥ 1 . L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera \mathbb{R}^n à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0, x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note \tilde{X} la fonction polynomiale définie sur \mathbb{R} par la formule

$$\tilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = (h_{j,k}^{(n)})_{0 \leq j, k \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt$.

On note \mathcal{V} le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n .

2) Montrer que $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si ${}^tX H_n X = \rho_n \|X\|^2$

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de \mathcal{V} . On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0 H_n X_0 \leq {}^t|X_0| H_n |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) Montrer que $H_n |X_0|$, puis que X_0 , n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre \mathcal{V} .

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^n et P un polynôme à coefficients réels.

- 6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$, montrer l'inégalité $\left| \int_{-1}^1 P(t) dt \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})| d\theta$, puis l'inégalité ${}^t X H_n X \leq \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$.
- 7) En déduire que ${}^t X H_n X \leq \pi \|X\|^2$
- 8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $]0, 1[$ et $T_n : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx) f(t) dt.$$

- 9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E , dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)
- 10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\tilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles. On note \mathcal{A} l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0, 1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0, 1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n .
- 11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n , montrer que

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{x \in]0, 1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx) \varphi(t) dt$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$r_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx) \varphi(t) dt,$$

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} dt,$$

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur \mathbb{R}_+^* par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{pour tout } x > 0.$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pour tout entier } n > 0.$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \quad \text{pour tous réels } \alpha > 0, \beta > 0.$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathcal{A}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1) \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ . (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x) = 0$ et où l'on montrera que $c = \varphi(0)$.)

14) Dédurre des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt.$$

15) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0, 1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0) = 1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\Phi'_n(x) = -(\gamma + 1) \frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ .

17) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt.$$

18) En déduire que pour $n \geq 1$,

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0, 1[} \sup_{x \in]0, 1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1 - \theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt$$

où l'on a posé $\theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0, 1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n} \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2 \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin \frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

FIN DU PROBLÈME

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) H_n est symétrique réelle.

$$\int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt = \int_0^1 \sum_{0 \leq j, k \leq (n-1)} x_j x_k t^{j+k} dt = \sum_{0 \leq j, k \leq (n-1)} \frac{x_j x_k}{j+k+1} = {}^T X H_n X.$$

On a $\int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt \geq 0$, donc ${}^T X H_n X \geq 0$, alors H_n est positive.

et si ${}^T X H_n X = 0$, alors $\int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt = 0$, donc $\forall t \in [0, 1]; \tilde{X}(t) = 0$, donc $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$, alors $X = 0$, donc H_n est définie. Conséquence H_n est définie positive.

2) Si $X \in \mathcal{V}$, alors $H_n X = \rho_n X$, donc ${}^T X H_n X = \rho_n {}^T X X = \rho_n \|X\|^2$.

H_n est orthogonalement diagonalisable, car symétrique réelle, donc si $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r = \rho_n$ sont les valeurs propres de H_n , soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^T X H_n X = \rho_n {}^T X X = \rho_n \|X\|^2$, alors $\exists (X_1, \dots, X_r) \in E_{\lambda_1}(H_n) \times \dots \times E_{\lambda_r}(H_n)$ tels que $X = \sum_{i=1}^r X_i$, alors ${}^T X H_n X = {}^T X \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i {}^T X_i X_i$, car la somme des espaces propres est orthogonale, alors la condition; ${}^T X H_n X = \rho_n {}^T X X$ donne $\rho_n \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i {}^T X_i X_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2$, alors $\sum_{i=1}^r (\rho_n - \lambda_i) \|X_i\|^2 = 0$, donc pour $i \neq r$, $X_i = 0$, donc $X = X_r \in E_{\lambda_r}(H_n) = E_{\rho_n}(H_n) = \mathcal{V}$. D'où l'équivalence.

3) On a

$$\begin{aligned} {}^T X_0 H_n X_0 &= |{}^T X_0 H_n X_0| \text{ car } H_n \text{ est positive} \\ &= \left| \sum_{0 \leq j, k \leq (n-1)} \frac{x_j x_k}{j+k+1} \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq j, k \leq (n-1)} \frac{|x_j| |x_k|}{j+k+1} \\ &\leq {}^T |X_0| H_n |X_0| \end{aligned}$$

Or $X_0 \in \mathcal{V}$, donc ${}^T X_0 H_n X_0 = \rho_n \|X_0\|^2$, donc $\rho_n \|X_0\|^2 \leq {}^T |X_0| H_n |X_0|$, avec le même calcul fait en question 2, en écrivant $|X_0| = \sum_{i=1}^r X_i$ aboutit à ${}^T |X_0| H_n |X_0| =$

$\sum_{i=1}^r \lambda_i {}^T X_i X_i$, alors ${}^T |X_0| H_n |X_0| \leq \rho_n \sum_{i=1}^r {}^T X_i X_i \leq \rho_n \|X_0\|^2$, en rassemblant on obtient $\rho_n \|X_0\|^2 \leq {}^T |X_0| H_n |X_0| \leq \rho_n \|X_0\|^2$, et X_0 et $|X_0|$ ont même norme, donc ${}^T |X_0| H_n |X_0| = \rho_n \|X_0\|^2$, par la question 2) on aura $|X_0| \in \mathcal{V}$.

- 4) X_0 est non nul, alors toutes les composantes de $H_n|X_0|$ sont strictement positives, car les coefficients de H_n sont strictement positifs, et l'égalité $H_n|X_0| = \lambda|X_0|$, où λ est une valeur propre de H_n qui est définie positive, donc $\lambda > 0$, alors toutes les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives.
- 5) Supposons que $\dim \mathcal{V} \geq 2$, et soit (X_1, X'_1) une famille libre de \mathcal{V} , et soit x_1, x'_1 les premières composantes de X_1 et X'_1 respectivement, alors la première composante de $x'_1 X_1 - x_1 X'_1$ est nulle, comme ce vecteur est dans \mathcal{V} par la question précédente, $x'_1 X_1 - x_1 X'_1 = 0$, alors $X_1 = \frac{x_1}{x'_1} X'_1$, donc (X_1, X'_1) est liée, absurde, alors $\dim \mathcal{V} = 1$.

B. Inégalité de Hilbert

- 6) Supposons que $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta &= \int_0^\pi \sum_{j=0}^N a_j e^{i(j+1)\theta} d\theta \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{a_j}{(j+1)i} [e^{i\pi(j+1)} - 1] \\ &= -i \sum_{j=0}^N \frac{a_j}{(j+1)} [(-1)^{j+1} - 1] \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 P(t) dt \right| &= \left| \sum_{j=0}^N \frac{a_j}{(j+1)} [1 - (-1)^{j+1}] \right| \\ &= \left| \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})| d\theta \end{aligned}$$

$$\text{Donc } {}^T X H_n X = \int_0^1 |\tilde{X}(t)|^2 dt \leq \int_{-1}^1 |\tilde{X}(t)|^2 dt \leq \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

7) Or

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta &= \int_0^\pi \sum_{0 \leq j, k \leq (n-1)} x_j x_k e^{i(j-k)\theta} d\theta \\ &= \sum_{0 \leq j \neq k \leq (n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)} ((-1)^{j-k} - 1) + \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 \pi \end{aligned}$$

et $\sum_{0 \leq j \neq k \leq (n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)} ((-1)^{j-k} - 1) = \sum_{0 \leq j < k \leq (n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)} ((-1)^{j-k} - 1) + \sum_{0 \leq k < j \leq (n-1)} x_j x_k \frac{1}{(j-k)} ((-1)^{j-k} - 1) = 0$ car en échangeant les rôles des derniers indices, la parenthèse $((-1)^{j-k} - 1)$ ne change mais $\frac{1}{(j-k)}$ devient $-\frac{1}{(j-k)}$, donc $\int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})| d\theta \leq \pi \|X\|^2$, alors :

$${}^T X H_n X \leq \pi \|X\|^2$$

8) Si $X \in \mathcal{V}$ non nul, alors ${}^T X H_n X = \rho_n \|X\|^2 \leq \pi \|X\|^2$, donc $\rho_n \leq \pi$, la suite est donc majorée.

Soit $X_n \in \mathcal{V}$ tel que $X_n \neq 0$, et soit $X = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}$, alors

$$\rho_n \|X_n\|^2 = {}^T X_n H_n X_n = {}^T X H_{n+1} X \leq \rho_{n+1} \|X\|^2 = \rho_{n+1} \|X_n\|^2$$

Alors $\rho_n \leq \rho_{n+1}$, la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, comme elle est majorée donc converge.

C. Un opérateur intégral

9) K_n est une fonction polynômiale donc bornée sur $[0, 1]$, si $f \in E$, alors $K_n f$ est continue et intégrable sur $[0, 1]$, T_n est donc une application de plus, $T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx) f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^1 t^k f(t) dt \right) x^k$, donc $T_n(f) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc $T_n(f) \in E$, T_n est linéaire c'est simple.

On remarque $T_n(E) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$, or E est de dimension infinie, et $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ est de dimension finie, donc l'application T_n n'est pas injective, donc $\exists f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = 0$, donc 0 est une valeur propre de T_n .

Autre méthode : posons $f(t) = [(t(t-1))^n]^{(n)}$ convient aussi car elle vérifie $\forall k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}, \int_0^1 t^k f(t) dt = 0$.

$$10) T_n(\tilde{X})(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right) dt = \sum_{0 \leq i, j \leq (n-1)} x^i x_j \int_0^1 t^{i+j} dt = \sum_{0 \leq i, j \leq (n-1)} \frac{x^i x_j}{i+j+1}$$

$$\text{Donc } T_n(\tilde{X})(x) = (x_0, \dots, x_{n-1}) H_n \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix} = (1, \dots, x^{n-1}) H_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

H_n est définie positive, donc 0 n'est pas une valeur propre de H_n , par contre 0 est une valeur propre de T_n .

Soit λ une valeur propre de H_n , donc $\exists X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $H_n X =$

λX , dans l'égalité précédente, on remplace et $T_n(\tilde{X})(x) = \lambda(1, \dots, x^{n-1})X = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} x_j x^j = \lambda \tilde{X}(x)$, donc :

$$T_n(\tilde{X}) = \lambda \tilde{X}$$

Alors λ est une valeur propre de T_n car $\tilde{X} \neq 0$.

Maintenant si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de T_n , donc $\exists f \in E$ non nul tel que $T_n(f) = \lambda f$, comme $\lambda \neq 0$, alors $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, donc f est une

fonction polynômiale, posons $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j x^j = \tilde{X}(x)$, alors $T_n(\tilde{X})(x) =$

$\lambda \tilde{X}(x) = \langle (1, x, \dots, x^{n-1}) | \lambda X \rangle$, or $T_n(\tilde{X})(x) = \langle (1, x, \dots, x^{n-1}) | H_n X \rangle$, donc :

$H_n X - \lambda X \in [\text{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})]^\perp$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Posons $F_x = (1, x, \dots, x^{n-1})$, et soient a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts deux à deux, alors :

$H_n X - \lambda X \in [\text{Vect}(F_{a_1}, \dots, F_{a_n})]^\perp$ dans \mathbb{R}^n , or la famille $(F_{a_1}, \dots, F_{a_n})$ est une base de \mathbb{R}^n par Vandermonde, donc $H_n X - \lambda X = 0$, alors λ est une valeur propre de H_n .

Remarque Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors X est un vecteur propre de H_n associé à λ si et seulement si \tilde{X} est un vecteur propre de T_n associé à λ .

11) Soit $f \in E$ non nul tel que $T_n(f) = \rho_n f$, on a déjà montrer que f est une fonction polynômiale car $\rho_n \neq 0$, posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k$ alors $H_n X = \rho_n X$

où $X \in \mathbb{R}^n$ de composantes x_0, \dots, x_{n-1} , on a par la question 3), $H_n |X| = \rho_n |X|$, posons $\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k| x^k$; on a bien ψ est strictement positive sur

$]0, 1[$ et les x_k sont tous non nuls par la question 4), donc $\frac{1}{\psi}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$, donc $\psi \in \mathcal{A}$ et $T_n(\psi) = \rho_n \psi$, donc

$\forall x \in [0, 1], \rho_n = \frac{1}{\psi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \psi(t) dt$, alors $\rho_n = \sup_{x \in]0, 1[} \frac{1}{\psi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \psi(t) dt$,

donc inf est atteint et il y'a donc égalité dans l'inégalité suivante :

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{x \in [0, 1]} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt$$

L'inégalité est laissé au lecteur.

Une majoration explicite des rayons spectraux

12) $\forall x \in]0, 1[$, l'application $t \mapsto \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)}$ est continue sur $[0, 1]$ (φ se comporte comme une fonction continue sur $[0, 1]$).

$\forall t \in [0, 1]$, l'application $x \mapsto \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)} = \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1-tx)^2}.$$

$\forall x \in]0, 1[$ l'application $t \mapsto \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1-tx)^2}$ est continue sur $[0, 1]$.

Donc J_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. et

$$\forall x \in]0, 1[, J_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt.$$

$$\text{Alors : } \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - \frac{t^n(1-tx)\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt = xJ_n(x).$$

13) En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-t}{1-tx} \varphi'(t) dt &= \left[\frac{1-t}{1-tx} \varphi(t) \right]_0^1 - (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \\ &= -\varphi(0) + (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{Alors } 0 = \varphi(0) + (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{1-t}{1-tx} \varphi'(t) dt$$

Ici $c = \varphi(0)$.

Toujours une intégration par parties donne dans le cas de $n \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-tx} \varphi'(t) dt = - \int_0^1 \frac{nt^{n-1}(1-t) - nt^n(1-t) + (x-1)t^n}{(1-tx)^2} \varphi(t) dt, \text{ Donc}$$

$$\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-tx} \varphi'(t) dt + (x-1) \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + nJ_{n-1} - nJ_n = 0$$

Alors $c = 0$.

14) En remplaçant $\int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt$ par $xJ_n'(x) + J_n(x)$ dans la question 13) et

en remarquant que $nJ_{n-1}(x) = n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt + nxJ_n(x)$, on obtient le résultat.

15) Sur $[0, 1]$, l'équation différentielle donnée est équivalente à $y' = \frac{-\gamma}{1-t} y$ dont l'ensemble des solutions est l'ensemble des applications $y \mapsto \lambda(1-t)^\gamma$. Pour qu'une solution vérifie les conditions sur φ il faut et il suffit que $\lambda > 0$ et $\gamma \leq 0$ et $\gamma + 1 > 0$.

La condition voulue est donc $-1 < \gamma \leq 0$ et $\lambda > 0$.

16) Alors $\varphi(t) = (1-t)^\gamma$.

φ et J_n sont dérivables sur $]0, 1[$, donc ϕ_n aussi, et

$$\phi'_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)}(nx^{n-1}J_n(x) + x^n J'_n(x)) - x^n J_n(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = n \frac{\phi_n(x)}{x} + \frac{x^n J'_n(x)}{\varphi(x)} + \frac{\gamma}{(1-x)^{\gamma+1}} x^n J_n(x),$$

$$\text{Alors } \phi'_n(x) = \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\phi_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} [x(1-x)J'_n(x)]$$

Et puisque $(1-t)\varphi'(t) = -\gamma\varphi(t)$, et par application de la question 14, alors

$$\phi'_n(x) = \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\phi_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} \left[c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt - \gamma J_n(x) \right].$$

$$\text{Donc } \phi'_n(x) = \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\phi_n(x) - \frac{(n+1)}{x} \phi_n(x) - \frac{\gamma}{x(1-x)} \phi_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} \left[c + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt \right].$$

Et puisque $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, alors :

$$\phi'_n(x) = -(\gamma+1) \frac{\phi_n(x)}{x} + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$$

$$\text{où } c_n = c + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt = c + n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{(\gamma+1)-1} dt = c + n \frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}.$$

Or $\Gamma(n+\gamma+1) = (n+\gamma)((n+\gamma-1)\dots(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1))$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = c + n \frac{(n-1)!}{(n+\gamma)((n+\gamma-1)\dots(\gamma+1))} = c + \frac{n!}{(n+\gamma)((n+\gamma-1)\dots(\gamma+1))} \text{ et } c_0 = c = \varphi(0) = 1.$$

17) Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = -(\gamma+1)y + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$

sont de la forme $x \mapsto \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt + \frac{\lambda}{x^{1+\gamma}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et puisque

$$\phi_n(0) = 0, \text{ alors } \lambda = 0 \text{ et } \phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt.$$

18) On a :

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{(1-x)^\gamma} \int_0^1 K_n(xt)(1-t)^\gamma dt \\ &= \frac{1}{(1-x)^\gamma} \int_0^1 \frac{1-(xt)^n}{1-xt} (1-t)^\gamma dt \\ &= \frac{1}{(1-x)^\gamma} \int_0^1 \frac{1}{1-xt} (1-t)^\gamma dt - \frac{x^n}{(1-x)^\gamma} \int_0^1 \frac{t^n}{1-xt} (1-t)^\gamma dt \\ &= \phi_0(x) - \phi_n(x) \end{aligned}$$

Or $\varphi(0) = 1 = c_0$, alors :

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} dt - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt \\ &= \frac{1}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{1-c_n t^n}{t^{-\gamma}(1-t)^{1+\gamma}} dt \end{aligned}$$

On prend $\alpha = -\gamma$ et $\theta_n = c_n$, par la question 11) $\rho_n(x) \leq \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt$

pour tout $\varphi \in \mathcal{A}$, en particulier pour $\varphi(t) = (1-t)^\gamma$. On a

$$\rho_n \leq \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-c_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt \text{ et l'inégalité est vrai pour tout } \alpha \in]0,1[,$$

$$\text{alors } \rho_n(x) \leq \inf_{\alpha \in]0,1[} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-c_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt$$

19) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ dans l'égalité admise et puisque dans ce cas :

$$\theta_n = \frac{n!}{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\dots(n-\frac{1}{2})} = \frac{n!}{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}, \text{ donc } \theta_n^{\frac{1}{2n}} = 2 \left(\frac{n!^2}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} = \omega_n$$

$$\text{et puisque } \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\sqrt{4t-4t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}, \text{ alors ;}$$

$$t \mapsto \arcsin(2t-1) = 2 \arcsin(\sqrt{t}) - \pi \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}},$$

alors :

$$\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$$

20) Par stirling

$$\begin{aligned} \omega_n^{2n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{2n} \frac{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\pi n} \end{aligned}$$

Donc

$$\omega_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (\sqrt{\pi n} + o(\sqrt{n}))^{\frac{1}{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{2n} \ln(\sqrt{\pi n} + o(\sqrt{n}))} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n\pi)}{4n} + o\left(\frac{\ln(n\pi)}{4n}\right)$$

$$\text{Donc un équivalent de } \omega_n - 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ est } \frac{\ln(n\pi)}{4n} \text{ ou } \frac{\ln(n)}{4n}.$$

$$\text{Donc } \pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour les remarques

sadikoulmeki@yahoo.fr
Omar SADIK CPGE My Driss Fès.