

**Partie I : Cocycles**

1°)

- a) Si  $U^*AU = V^*AV$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ , alors, puisque  $V^{-1} = V^*$ , d'où  $V^{*-1} = V$ , on a  $VU^*A = AVU^*$ , i.e.  $VU^*$  commute avec toute matrice de  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ . Il est bien connu que ceci implique  $VU^*$  scalaire, d'où l'existence de  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $V = \lambda U$ . Mais  $U$  et  $V$  unitaires impliquent alors  $|\lambda| = 1$  :

$$I_d = (\lambda U)^*(\lambda U) = \bar{\lambda}\lambda(U^*U) = |\lambda|^2 \cdot I_d \Rightarrow |\lambda| = 1 .$$

La réciproque est immédiate.

- b) Par définition, il existe une famille  $(U_t)$  de matrices unitaires telles que  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \quad \varphi_t(A) = U_t^*AU_t$ . On peut de plus restreindre le choix pour imposer  $U_0 = I_d$ .

Pour une telle famille, puisque  $\varphi_{t+s} = \varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$ , les matrices  $U_{t+s}$  et  $U_tU_s$  sont associées à la même conjugaison, donc on a bien par a) l'existence de  $\alpha(t, s) \in S^1$  tel que  $U_{t+s} = \alpha(t, s)U_tU_s$ .

Cette égalité impose, via  $U_0 = I_d$ , pour  $t = 0$  ou  $s = 0$ ,  $\alpha(0, s) = \alpha(t, 0) = 1$ . Mais d'autre part, en écrivant  $(t+s) + u = t + (s+u)$ , on a

$$U_{t+s+u} = \alpha(t+s, u)U_{t+s}U_u = \alpha(t+s, u).\alpha(t, s)U_tU_sU_u = \alpha(t, s+u).\alpha(s, u)U_tU_sU_u ,$$

d'où l'égalité pour tous  $s, t$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha(t+s, u).\alpha(t, s) = \alpha(t, s+u).\alpha(s, u)$ .

2°)

- a) Supposons  $\tilde{\alpha}(m, n) = \frac{u_m u_n}{u_{m+n}} = \frac{v_m v_n}{v_{m+n}}$  pour tous  $m, n$  dans  $\mathbb{N}$ . Déjà, par définition,  $u_0 = v_0 = 1$  puisque  $\tilde{\alpha}(0, n) = 1$ . Posons  $a = \frac{u_1}{v_1}$  :  $a \in S^1$  puisque  $u_1$  et  $v_1$  sont dans  $S^1$ , et on a  $u_n = a^n v_n$  pour  $n = 0, 1$ . Supposons cette égalité vraie pour  $n$ , alors de  $\frac{v_1 v_n}{v_{n+1}} = \frac{u_1 u_n}{u_{n+1}} = \frac{a v_1 a^n v_n}{u_{n+1}}$  on déduit  $u_{n+1} = a^{n+1} v_{n+1}$ , puisque les  $v_i$  sont non nuls. Donc  $u_n = a^n v_n$  par récurrence.

- b) Par récurrence, montrons que si on connaît  $\tilde{\alpha}(m, n)$  pour tout  $n$ , alors on connaît  $\tilde{\alpha}(m+1, n)$  pour tout  $n$ . En effet, on a par propriété de cocycle,  $\tilde{\alpha}(m, 1)\tilde{\alpha}(m+1, n) = \tilde{\alpha}(m, n+1)\tilde{\alpha}(1, n)$ , d'où  $\tilde{\alpha}(m, n+1) = \frac{\tilde{\alpha}(m, 1)\tilde{\alpha}(m+1, n)}{\tilde{\alpha}(1, n)}$ , cqfd.

- c) Prenons la suite déterminée par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = a$ ,  $a \in S^1$  quelconque, et  $u_{n+1} = \frac{a u_n}{\tilde{\alpha}(1, n)}$ , et montrons que  $\tilde{\alpha}(m, n) = \frac{u_m u_n}{u_{m+n}}$  par récurrence sur  $m$ .

C'est vrai pour  $m = 1$  ( $\forall n$ ) par définition de  $u_n$ . Supposons que ce soit vrai pour  $m$ , toujours  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Alors, pour  $m+1$  :

$$\begin{aligned} \frac{u_{m+1} u_n}{u_{m+n+1}} &= \frac{u_m u_n}{u_{m+n}} \frac{\tilde{\alpha}(1, m+n)}{\tilde{\alpha}(1, m)} \quad (\text{par définition de } u_n) \\ &= \frac{\tilde{\alpha}(m, n)\tilde{\alpha}(1, m+n)}{\tilde{\alpha}(1, m)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{\tilde{\alpha}(1, m)\tilde{\alpha}(m+1, n)}{\tilde{\alpha}(1, m)} = \tilde{\alpha}(m+1, n) \quad (\text{par propriété de cocycle}) . \end{aligned}$$

La suite  $u_n$  ainsi définie détermine bien  $\tilde{\alpha}$ .

3°)

- a) Remarquons que pour  $n$  fixé, la famille  $\tilde{\alpha}_n(\ell, k)$  vérifie les mêmes propriétés «de cocycle» que la famille  $\tilde{\alpha}(m, n)$  ci-dessus, donc en particulier, elle est entièrement déterminée par  $\tilde{\alpha}_n(1, k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , on a vu qu'il existe une suite  $(u_k) = (u_k^{(0)})$  déterminant  $\tilde{\alpha}_0(\ell, k) = \tilde{\alpha}(\ell, k)$ . Pour  $n \geq 1$ , définissons comme avant  $u_k^{(n)}$  par  $u_0^{(n)} = 1$ ,  $u_1^{(n)} = \lambda_n \in S^1$  (a priori quelconque mais qui sera déterminé plus loin), et  $u_{k+1}^{(n)} = \frac{\lambda_n u_k^{(n)}}{\tilde{\alpha}_n(1, k)}$ . La démonstration précédente s'applique identiquement et montre qu'on a bien  $\forall (\ell, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \tilde{\alpha}_n(\ell, k) = \frac{u_\ell^{(n)} u_k^{(n)}}{u_{\ell+k}^{(n)}}$ .

Maintenant, la condition  $u_2^{(n)} = u_1^{(n)}$  se traduit par  $\frac{\lambda_{n+1}^2}{\tilde{\alpha}_{n+1}(1, 1)} = \lambda_n$ , et pour la réaliser, il suffit que la suite  $(\lambda_n)$  vérifie cette relation de récurrence, ce qui est toujours possible, puisqu'il existe toujours des racines carrées (dans  $S^1$ ) à des nombres de  $S^1$ .

- b) La relation  $u_{2k}^{(n)} = u_k^{(n)}$  est vérifiée par ci-dessus pour  $k = 1$ , montrons qu'elle passe de  $k$  à  $k + 1$ . On a, par propriété de cocycle et par  $\tilde{\alpha}_{n+1}(2\ell, 2k) = \tilde{\alpha}_n(\ell, k)$  :

$$\begin{aligned} u_{2k+2}^{(n+1)} &= \frac{u_2^{(n+1)} u_{2k}^{(n+1)}}{\tilde{\alpha}_{n+1}(2, 2k)} \\ &= \frac{u_1^{(n)} u_k^{(n)}}{\tilde{\alpha}_n(1, k)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= u_{k+1}^{(n)} \quad , \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

- c) Tout  $x \in D_+$  s'écrit  $x = \frac{k}{2^n}$ , et la valeur  $u_k^{(n)}$  ne dépend pas du choix de cette représentation. En effet, si  $x = \frac{k'}{2^{n'}}$ , c'est que par exemple  $k' = 2^p \cdot k$  et  $n' = n + p$ , or, par récurrence immédiate à partir de  $u_{2k}^{(n+1)} = u_k^{(n)}$ , on a  $u_{k \cdot 2^p}^{(n+p)} = u_k^{(n)}$ . Ainsi on peut bien définir  $u_x = u_k^{(n)}$ .  
Alors, pour  $s, t$  dans  $D_+$  qu'on peut choisir d'écrire  $s = \frac{\ell}{2^n}$ ,  $t = \frac{k}{2^n}$ , on a bien

$$\alpha(s, t) = \tilde{\alpha}_n(\ell, k) = \frac{u_\ell^{(n)} u_k^{(n)}}{u_{\ell+k}^{(n)}} = \frac{u_s u_t}{u_{s+t}} .$$

- 4°) Vérification facile, vue la détermination de  $\alpha$  par  $u$  :

$$V_s V_t = u_s u_t U_s U_t = \alpha(s, t) u_{s+t} U_s U_t = u_{s+t} U_{s+t} = V_{s+t} .$$

- 5°) On pose, pour  $t \in D$ ,  $t < 0$  :  $V_t = (V_{-t})^{-1} = (V_{-t})^*$ , ainsi  $(V_t)_{t \in D}$  est un groupe (on a  $V_0 = U_0 = I_d$  et on vérifie dans chaque cas  $s < 0$  et/ou  $t < 0$  que  $V_{s+t} = V_s V_t$  reste vrai. Par exemple, pour  $t, s$  dans  $D_+$  avec  $s - t < 0$ , de  $V_{t-s} V_s = V_t$  on déduit  $V_{s-t} = (V_{t-s})^* = V_s (V_t)^* = V_s V_{-t}$ ).  
Mais alors  $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$ , qui est vrai pour  $t \in D_+$  car on a vu que multiplier  $U_t$  par un scalaire de  $S^1$  en changeait rien, est vrai aussi pour  $t < 0$  : d'une part, de  $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = Id$  on déduit  $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$  et d'autre part on a  $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t \Rightarrow A = V_t \cdot \varphi_t(A) \cdot V_t^* = (V_{-t})^* \cdot \varphi_t(A) \cdot V_{-t}$ , d'où on déduit bien que pour tout  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  l'antécédent de  $A$  par  $\varphi_t$  est  $\varphi_{-t}(A) = (V_{-t})^* A V_{-t}$ .
- 6°) On utilise ici la densité de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $(s_n)$  une suite de  $D$  qui tend vers  $t$ . La suite  $(s_n)$  est de Cauchy, donc la suite  $(V_{s_n})$  aussi. En effet, vu la norme (triple) choisie,

$$\|V_{s_n} - V_{s_p}\| \leq \underbrace{\|V_{s_p}\|}_{=1} \cdot \|I_d - V_{s_n - s_p}\| = \|V_{s_n - s_p} - I_d\| ,$$

et pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut d'une part choisir  $\eta > 0$  pour que  $\|V_u - I_d\| < \varepsilon$  dès que  $|u| < \eta$  (continuité de  $t \mapsto V_t$  en 0), d'autre part choisir un rang  $N$  tel que  $|s_n - s_p| < \eta$  dès que  $n$  et  $p$  sont supérieurs à  $N$ .

L'espace  $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$  est de dimension finie, donc complet, donc la suite  $V_{s_n}$  admet une limite  $V$ . La relation  $V_{s_n}^* V_{s_n} = I_d$  se prolonge à la limite par continuité de l'application  $U \mapsto U^* U$ , donc  $V$  est unitaire. De plus, cette limite ne dépend pas du choix de la suite  $s_n \in D$  qui tend vers  $t$ . En effet, si  $t_n$  est une autre suite de  $D$  qui tend vers  $t$ , alors  $V_{t_n}$  tend vers  $V$  aussi car  $V_{s_n} - V_{t_n} \rightarrow 0$ , vu que  $t_n - s_n \rightarrow 0$ , que  $\|V_{s_n} - V_{t_n}\| \leq \|I_d - V_{s_n - t_n}\|$ , et par continuité de  $t \mapsto V_t$  en 0.

Par continuité du produit, la relation  $V_{s+t} = V_s V_t$ , se prolonge de  $D$  à  $\mathbb{R}$ , et comme on a déjà  $V_0 = I_d$ ,  $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est bien un groupe unitaire.

Pour conclure, montrons enfin que l'application  $t \mapsto V_t$  ainsi définie est bien continue sur  $\mathbb{R}$ . Par  $\|V_s - V_t\| \leq \|V_{s-t} - I_d\|$  (déjà vu), il suffit de montrer cette continuité au point  $t = 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un  $\eta > 0$  tel que  $\forall t_n \in D$ ,  $|t_n| < \eta$ , on ait  $\|V_{t_n} - I_d\| < \varepsilon$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $|t| < \eta$ ,  $t$  est la limite d'une suite  $(t_n) \in D$  qui donc vérifie  $|t_n| < \eta$  à partir d'un certain rang, d'où à partir du même rang,  $\|V_{t_n} - I_d\| < \varepsilon$ , inégalité qui se prolonge en  $\|V_t - I_d\| \leq \varepsilon$ , ce qu'on voulait.

## Partie II : Continuité

- 1°)

- a) Commençons d'abord par le cas particulier  $\Psi = e_1$ , premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Si on note  $v_{ij}(t)$  les éléments de la matrice  $V_t$ , alors  $\langle \Psi | V_t \Psi \rangle = v_{1,1}(t)$ . Or,  $V_t^* A V_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} A$  appliqué à la matrice élémentaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ donne } |v_{1,1}(t)|^2 \rightarrow 1, \text{ ce qu'on veut.}$$

Dans le cas général, il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $\Psi = U e_1$  (on complète la première colonne  $\Psi$  de  $U$  en le vecteurs d'une base O.N. commençant par  $\Psi$ ). On a alors que

$$\langle \Psi | V_t \Psi \rangle = \langle U e_1 | V_t U e_1 \rangle = \langle e_1 | (U^* V_t U) e_1 \rangle .$$

Mais  $W_t = U^* V_t U$  vérifient la même propriété de «continuité» que  $V_t$ : par continuité du produit matriciel,

$$W_t^* A W_t = U^* (V_t^* (U A U^*) V_t) U \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} U^* U A U^* U = A \quad (\text{car } U^* U = I_d) .$$

Donc, par le même raisonnement que ci-dessus appliqué à  $W_t$ ,

$$|\langle \Psi | V_t \Psi \rangle|^2 = |\langle e_1 | W_t \Psi \rangle|^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 .$$

- b) Dans une B.O.N.  $\mathcal{B} = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$  commençant par  $\Psi_1 = \Psi$ , la matrice de  $X \mapsto V_t X$  est d'éléments  $v_{i,j}(t)$  tels que

$\langle \Psi | V_t \Psi \rangle = v_{1,1}(t)$ , et la première colonne est normée, soit  $|v_{1,1}(t)|^2 + \sum_{i=2}^n |v_{1,i}(t)|^2 = 1$ . De  $|v_{1,1}(t)|^2 \rightarrow 1$  on déduit

donc que  $\forall i \geq 2 \quad v_{1,i}(t) \rightarrow 0$ .

Notons  $\theta_t$  un argument de  $v_{1,1}(t)$ :  $v_{1,1}(t) = |v_{1,1}(t)| \cdot e^{i\theta_t}$ . On a

$$\begin{aligned} V_t \Psi &= v_{1,1}(t) \Psi + \sum_{i=2}^n v_{i,1}(t) \Psi_i \\ &= e^{i\theta_t} \Psi + \underbrace{(|v_{1,1}| - 1)}_{\rightarrow 0} e^{i\theta_t} \Psi + \sum_{i=2}^n \underbrace{v_{i,1}(t)}_{\rightarrow 0} \Psi_i \\ &= e^{i\theta_t} \Psi + \varepsilon(t) , \end{aligned}$$

où  $\varepsilon(t)$  tend vers 0 comme somme finie de limites nulles, vu que les  $\Psi_k$  sont fixés.

- 2°) Premier cas :  $\Psi'$  est colinéaire à  $\Psi$ , soit  $\Psi' = a\Psi$ , avec  $|a| = 1$ . Alors,  $\langle \Psi' | V_t \Psi' \rangle = \bar{a} a \langle \Psi | V_t \Psi \rangle$ , donc  $b_t = a_t$ .

Deuxième cas :  $\Psi'$  non colinéaire à  $\Psi$ , auquel cas on peut choisir une B.O.N.  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  commençant par  $\Psi = e_1$  telle que  $\Psi' \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ :  $\Psi' = a e_1 + b e_2$ , avec  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . (Cela revient à remplacer  $V_t$  par  $U^* V_t U$  où  $U$  est la matrice unitaire de changement de B.O.N.). En notant comme avant  $v_{i,j}(t)$  les éléments de matrice de  $X \mapsto V_t X$  dans cette base (i.e. les éléments de la matrice  $W_t$ ), on a :

$$\begin{aligned} a_t &= \langle \Psi | V_t \Psi \rangle = v_{1,1}(t) \\ b_t &= \langle \Psi' | V_t \Psi' \rangle = |a|^2 v_{1,1}(t) + |b|^2 v_{2,2}(t) + \bar{a} b v_{1,2}(t) + a \bar{b} v_{2,1}(t) . \end{aligned}$$

Comme avant,  $|v_{1,1}(t)|$  et  $|v_{2,2}(t)|$  tendent vers 1, et comme les colonnes de  $W_t$  sont normées,  $v_{1,2}(t)$  et  $v_{2,1}(t)$  tendent vers 0. Vu  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , pour montrer que  $\frac{a_t}{b_t} \rightarrow 1$ , soit encore  $\frac{b_t}{a_t} \rightarrow 1$ , il suffit donc de montrer que  $\frac{v_{2,2}(t)}{v_{1,1}(t)} \rightarrow 1$ .

On utilise pour cela que  $|\langle \Psi' | V_t \Psi' \rangle|^2 \rightarrow 1$ . Compte tenu des remarques précédentes, on peut écrire :

$$|\langle \Psi' | V_t \Psi' \rangle|^2 = |a|^4 |v_{1,1}(t)|^2 + |b|^4 |v_{2,2}(t)|^2 + |a|^2 |b|^2 (\overline{v_{1,1}(t)} v_{2,2}(t) + v_{1,1}(t) \overline{v_{2,2}(t)}) + \varepsilon(t) , \text{ où } \varepsilon(t) \rightarrow 0 .$$

(En effet, les fonctions  $v_{1,1}(t)$  et  $v_{2,2}(t)$  sont bornées puisque leurs modules tendent vers 1.)

On a donc que  $\overline{v_{1,1}(t)} v_{2,2}(t) + v_{1,1}(t) \overline{v_{2,2}(t)}$  admet une limite quand  $t \rightarrow 0$ , à savoir  $\frac{1 - |a|^4 - |b|^4}{|a|^2 |b|^2} = 2$ . En divisant par  $\overline{v_{1,1}(t)} v_{1,1}(t)$  qui tend vers 1, on en déduit que  $\text{Re} \left( \frac{v_{2,2}(t)}{v_{1,1}(t)} \right) \rightarrow 1$ . Mais cela suffit à notre propos, puisque

$$\left| \frac{v_{2,2}(t)}{v_{1,1}(t)} \right| \rightarrow 1 , \text{ cqfd.}$$

- 3°) Il suffit de montrer qu'alors  $V_t \rightarrow I_d$ , i.e. (en dimension finie toutes les normes sont équivalentes), que les éléments  $v_{ij}(t)$  de la matrice  $V_t$  tendent vers  $\delta_{i,j}$  (symbole de Kronecker). Si  $V_t \Psi \rightarrow \Psi$ , par linéarité  $V_t \cdot \frac{\Psi}{\|\Psi\|} \rightarrow \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$ , donc  $\langle \Psi_1 | V_t \Psi_1 \rangle \rightarrow 1$  pour le vecteur unitaire  $\Psi_1 = \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$ . Mais alors, on a la même propriété pour *tout* vecteur unitaire  $\Psi_k$  ( $a_t \rightarrow 1$  et  $\frac{a_t}{b_t} \rightarrow 1$  impliquent  $b_t \rightarrow 1$ ). Or, dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , on a  $v_{i,i}(t) = \langle e_i | V_t e_i \rangle$ , donc les éléments diagonaux de  $V_t$  tendent vers 1. Comme  $V_t$  est unitaire, nécessairement les éléments non diagonaux tendent vers 0 ( $\forall i \neq j \quad |v_{i,j}(t)|^2 \leq 1 - |v_{i,i}(t)|^2 \rightarrow 0$ ), et donc  $V_t \rightarrow I_d$ , cqfd.

**Partie III : Familles presque multiplicatives**

1°) Il faut préciser ici que  $\Psi$  est unitaire !

La propriété de semi-groupe  $V_{s+t} = V_s V_t$  appliquée à  $s = 0$  donne que  $V_0 = I_d$ , puisque  $V_t$  est inversible, d'où  $\alpha_0 = 1$ . De plus,  $\Psi$  étant unitaire (énoncé! ?), on a déjà vu que  $|\alpha_t| \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Enfin, par définition,  $\frac{\alpha_{t+s}}{\alpha_t \alpha_s} = \frac{\langle \Psi | V_t V_s \Psi \rangle}{\langle \Psi | V_t \Psi \rangle \langle \Psi | V_s \Psi \rangle}$ . Calculons cette expression en nous plaçant dans une B.O.N.

commençant par  $\Psi$ , les applications  $X \mapsto V_t X$  ayant dans cette base des matrices d'éléments  $(v_{i,j}(t)) : \frac{\alpha_{t+s}}{\alpha_t \alpha_s} = \frac{v_{1,1}(s+t)}{v_{1,1}(s)v_{1,1}(t)}$ . La relation  $V_{s+t} = V_s V_t$  implique en particulier  $v_{1,1}(s+t) = v_{1,1}(s)v_{1,1}(t) + \sum_{k \geq 2} v_{1,k}(s)v_{k,1}(t)$ , or on

a déduit de  $|v_{i,i}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$  que  $v_{i,j}(t) \rightarrow 0$  dès que  $i \neq j$ . On peut donc écrire  $v_{1,1}(s+t) = v_{1,1}(s)v_{1,1}(t) + o(1)$ , et comme on peut diviser par  $v_{1,1}(t)$  et  $v_{1,1}(s)$  au moins dans un voisinage de 0, avec  $|v_{1,1}(t)| \rightarrow 1$  et  $|v_{1,1}(s)| \rightarrow 1$ , on a bien

$$\frac{\alpha_{t+s}}{\alpha_t \alpha_s} = \frac{v_{1,1}(s+t)}{v_{1,1}(s)v_{1,1}(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 .$$

2°)

a) Remarquons ici qu'on peut bien diviser par  $|a_t| \neq 0$  au moins dans un voisinage de  $t = 0$ , et si  $a_t = 0$  pour certains  $t$ , remplacer alors  $a_t$  par 1 ne change pas le caractère presque multiplicatif de la famille.

De plus, comme  $|a_t| \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$ , il est clair que diviser par  $|a_t|$  ne change pas le caractère presque multiplicatif de  $a_t$  (un produit ou quotient de limites égales à 1 reste de limite égale à 1).

b) D'abord, à cause de la propriété de semi-groupe, il faut choisir  $b_0 = 1$ , ce qui est toujours possible.

Ensuite, soit  $t \in D_+$  s'écrivant  $t = \frac{k}{2^n} = \frac{k2^p}{2^{n+p}}$ . On a par récurrence sur  $p$  à partir de la définition,  $\left(b \frac{1}{2^{n+p}}\right)^{2^p} = b \frac{1}{2^n}$ ,

d'où  $\left(b \frac{1}{2^n}\right)^k = \left(b \frac{1}{2^{n+p}}\right)^{k \times 2^p}$ , et cette valeur commune peut bien servir à définir  $b_t$  sans ambiguïté.

Enfin, pour  $s, t \in D_+$  qu'on peut représenter, par ci-dessus, par  $s = \frac{k}{2^n}$ ,  $t = \frac{p}{2^n}$ , on a par définition,

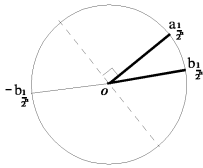
$$b_s \cdot b_t = \left(b \frac{1}{2^n}\right)^{k+p} = b \frac{k+p}{2^n} = b_{s+t} .$$

c) Posons comme suggéré  $c_n = \frac{a \frac{1}{2^n}}{b \frac{1}{2^n}}$ . Alors dans l'égalité  $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{a \frac{1}{2^n}}{\left(a \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2} \times \frac{\left(b \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}{b \frac{1}{2^n}}$ , le premier facteur tend vers

1 par quasi-multiplicativité, le second vaut 1 par multiplicativité (en posant  $s = t = \frac{1}{2^{n+1}}$  dans la définition), donc  $c_n \rightarrow 1$ .

De plus,  $\text{Re}(c_n) \geq 0$  par construction. En effet, «la plus proche» dit (puisque les deux racines carrées sont opposées) que

$$\left| \text{Arg}\left(a \frac{1}{2^n}\right) - \text{Arg}\left(b \frac{1}{2^n}\right) \right| = \left| \text{Arg}(c_n) \right| \leq \frac{\pi}{2} .$$



Appelons  $\theta_n$  l'argument de  $c_n$  dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . De  $\frac{c_n}{c_{n+1}} \rightarrow 1$  on déduit alors que  $\theta_n - 2\theta_{n+1} \rightarrow 0$  (puisque cet angle est *a priori* dans  $[-3\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$ ). Soit  $\varepsilon > 0$ ; à partir d'un certain rang  $N$  on a donc

$$-\varepsilon \leq \theta_n - 2\theta_{n+1} \leq \varepsilon \iff \frac{\theta_n}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \theta_{n+1} \leq \frac{\theta_n}{2} + \frac{\varepsilon}{2} ,$$

d'où par récurrence, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\frac{\theta_n}{2^k} - \frac{\varepsilon}{2^k} - \cdots - \frac{\varepsilon}{2} \leq \theta_n \leq \frac{\theta_n}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2^k} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2},$$

soit enfin, par convergence d'une suite géométrique,

$$\frac{\theta_N}{2^k} - \varepsilon \leq \theta_{N+k} \leq \frac{\theta_N}{2^k} + \varepsilon,$$

et, à partir du rang  $N_1 = N + p$  où  $\frac{\theta_N}{2^k} \leq \varepsilon$ , on aura  $|\theta_n| \leq 2\varepsilon$ . Donc  $\theta_n \rightarrow 0$ , et comme  $c_n$  est de module 1, finalement  $c_n \rightarrow 1$ .

3°)

- a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Posons successivement  $a'_t = a \frac{t}{2^{n-1}}$  et  $a''_t = \frac{a'_t}{b'_t}$ , où la famille  $(b'_t)$  est définie à partir de  $a'_t$  comme précédemment  $b_t$  à partir de  $a_t$ . Les familles  $(a'_t)$  et  $(a''_t)$  restent presque multiplicatives, à valeurs dans  $S^1$ , et de plus on a bien  $a''_1 = 1$ . Si on peut démontrer, dans  $D_+$ , pour  $(a''_t)$ , l'inégalité

$$\sup_{t \in [0, 1/2]} d(a''_t, 1) \leq 2 \sup_{s, t \in [0, 1]} d(a''_{t+s}, a''_t a''_s),$$

alors on a l'inégalité (1) pour  $(a_t)$ . En effet, comme  $(b'_t)$  est multiplicative,  $d(a''_{t+s}, a''_t a''_s) = d(a'_{t+s}, a'_t a'_s)$ , de plus,  $d(a'_t, 1) \leq d(a''_t, 1) + d(b'_t, 1)$ . Or, puisqu'on suppose tous les  $a \frac{1}{2^n}$  d'arguments «petits» (i.e.  $< \pi/10$ ), la suite  $b'_t$  est construite à partir de  $b'_1$  en prenant toujours les racines carrées qui divisent les arguments par 2, si bien que  $\text{Arg}(b'_{\frac{1}{2^n}}) = \frac{1}{2^n} \text{Arg}(b'_1)$  et que l'application  $t \mapsto \text{Arg}(b'_t)$  est décroissante. En conclusion, pour  $t \in [0, 1/2]$  on a  $d(b'_t, 1) \leq d(b'_{\frac{1}{2}}, 1) = \frac{1}{2} d(a'_1, 1)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \frac{1}{2^n}]} d(a_t, 1) &= \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} d(a'_t, 1) \\ &\leq \frac{1}{2} d(a'_1, 1) + \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} d(a''_t, 1) \\ &\leq \frac{1}{2} d(a \frac{1}{2^{n-1}}) + 2 \sup_{s, t \in [0, 1]} d(a''_{t+s}, a''_t a''_s) \\ &\leq \frac{1}{2} d(a \frac{1}{2^{n-1}}) + 2 \sup_{s, t \in [0, \frac{1}{2^{n-1}}]} d(a_{t+s}, a_t a_s), \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

- b) L'ensemble des  $n$  tels que  $\exists k \in \{0, \dots, 2^{n-1}\} \ d(a \frac{k}{2^n}, 1) > 2\varepsilon$  est un ensemble non vide d'entiers par définition, donc il existe un plus petit  $n_0$ . De même, pour  $n = n_0$  fixé, on a un plus petit  $k$  vérifiant la propriété.
- c) Par définition même,  $\theta \frac{k_0}{2^{n_0}} > 2\varepsilon$  et par minimalité de  $k_0$ ,  $\theta \frac{j_0}{2^{n_0}} \leq 2\varepsilon$  pour  $0 \leq j \leq k_0 - 1$ .
- d) Par inégalité triangulaire renversée, et par définition de  $\varepsilon$  :

$$d(a_{2x}) \geq d(a_x a_x, 1) - d(a_x a_x, a_{2x}) \geq 2d(a_x, 1) - \varepsilon.$$

En prenant  $x = \frac{k_0}{2^{n_0}}$ , on en déduit  $d(a \frac{2k_0}{2^{n_0}}) > 4\varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon$ .

- e) Si on avait  $\frac{k_0}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{4}$ , on aurait  $\frac{2k_0}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2}$ , et par **d)**  $n_0 - 1$  conviendrait à la place de  $n_0$ .

f) Cas 1 :  $\frac{2k_0}{2^{n_0}} \leq 1 < \frac{3k_0}{2^{n_0}}$  .

On écrit  $1 = \frac{2k_0}{2^{n_0}} + \frac{j}{2^{n_0}}$  , avec  $0 \leq j \leq k_0 - 1$  . En utilisant comme ci-dessus la définition de  $\varepsilon$  par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} d(a_1, 1) &= d\left(a \frac{2k_0}{2^{n_0}} + \frac{j}{2^{n_0}}, 1\right) \\ &\geq d\left(a \frac{2k_0}{2^{n_0}} \times a \frac{j}{2^{n_0}}, 1\right) - \varepsilon \\ &\geq d\left(a \frac{2k_0}{2^{n_0}}, 1\right) + d\left(a \frac{j}{2^{n_0}}, 1\right) - \varepsilon \\ &> 3\varepsilon - 2\varepsilon - \varepsilon > 0 \quad , \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse  $a_1 = 1$  .

Cas 2 :  $\frac{3k_0}{2^{n_0}} \leq 1 < \frac{4k_0}{2^{n_0}}$  .

D'une part, par  $\frac{3k_0}{2^{n_0}} = \frac{2k_0}{2^{n_0}} + \frac{k_0}{2^{n_0}}$  on déduit comme ci-dessus  $\theta \frac{3k_0}{2^{n_0}} \geq \theta \frac{2k_0}{2^{n_0}} + \theta \frac{k_0}{2^{n_0}} - \varepsilon > 4\varepsilon$  .

D'autre part, en écrivant comme avant  $1 = \frac{3k_0}{2^{n_0}} + \frac{j}{2^{n_0}}$  avec  $0 \leq j \leq k_0 - 1$  , on a :

$$0 = \theta_1 \geq \theta \frac{3k_0}{2^{n_0}} + \theta \frac{j}{2^{n_0}} - \varepsilon \implies \theta \frac{3k_0}{2^{n_0}} \leq 3\varepsilon \quad ,$$

d'où encore une contradiction.

Remarquons que dans le cas où  $\theta \frac{k_0}{2^{n_0}} < 0$  , on a  $\theta \frac{k_0}{2^{n_0}} < -2\varepsilon$  , et les raisonnements se font de même.

Finalement, ces contradictions montrent que  $\sup_{t \in [0,1/2]} d(a_t, 1) > \varepsilon$  est absurde, ce qui par **a**) prouve (1) .

g) La famille  $(b_t)$  construite au **2)b**) pour  $\frac{a_t}{|a_t|}$  convient. En effet, la famille  $a'_t = \frac{a_t}{|a_t|b_t}$  reste presque multiplicative, vérifie  $a'_1 = 1$  et  $a'_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$  . On peut lui appliquer (1), ce qui implique que  $a'_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$  , vu que dans le membre de droite de (1) les deux termes tendent vers 0 (le premier par **2)c**), le deuxième par quasi-multiplicativité de la famille). Comme  $|a_t| \rightarrow 1$  , on a bien que  $\frac{a_t}{b_t} \rightarrow 1$  aussi.

4°) On applique ce qui précède à la famille  $(a_t) = (\langle \Psi | V_t \Psi \rangle)$  où  $\Psi$  unitaire est fixé : on peut trouver  $b_t \in S^1$  , multiplicative, telle que  $\frac{a_t}{b_t} \rightarrow 1$  . Donc, en remplaçant  $V_t$  par  $\frac{1}{b_t} V_t$  on peut supposer en fait que  $\langle \Psi | V_t \Psi \rangle \rightarrow 1$  . Mais on a vu que  $V_t \Psi = e^{i\theta_t} \Psi + o(1)$  , d'où  $\langle \Psi | V_t \Psi \rangle = e^{i\theta_t} + o(1)$  , donc en fait ici  $e^{i\theta_t} \rightarrow 1$  , et finalement  $V_t \Psi \rightarrow \Psi$  . On a vu en **II**. que ceci était alors vrai pour tout  $\Psi$  unitaire, soit, puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie,  $V_t \rightarrow Id$  quand  $t \rightarrow 0$  : l'application  $t \mapsto V_t$  est continue en 0 . Mais cette continuité prouve, vu la propriété de groupe, la continuité partout :

$$\begin{aligned} \|V_t - V_s\| &\leq \|V_t V_s^{-1} - Id\| \cdot \|V_s\| \\ &\leq \|V_{t-s} - Id\| \quad (\text{propriété de groupe et } \|V_s\| = 1) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow t \quad (\text{composition de limites}). \end{aligned}$$

Comme  $V_t$  et  $\frac{1}{b_t} V_t$  définissent la même conjugaison, on a bien ainsi démontré le théorème d'Arveson ■

\*  
\* \*