ENS 2003 - Math PC

Titre : *Fractions continues.*

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_N$ des nombres réels strictement positifs. Pour $0 \leq n \leq N$, on note

$$F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Ainsi

$$F[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad F[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}.$$

Q1. Pour $1 \leq n \leq N$, les égalités

$$F[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = F\left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right], \quad F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = F[a_0, F[a_1, a_2, \ldots, a_n]]$$

résultent de la définition, car
$F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{d}}}$ avec $d = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}$ et
$F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \dfrac{1}{b} = F[a_0, b]$ avec $b = a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}} = F[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Pour $1 \leq m \leq n \leq N$, on montre par récurrence (finie) sur m que

$$F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = F[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, F[a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n]].$$

D'après ce qui précède, la relation est vraie pour $m = 1$.
Supposons-la vraie pour m tel que $1 \leq m < n$.
On a $F[a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n] = F[a_m, b]$ avec $b = F[a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n]$.

Par récurrence, on a $F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = F[a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, F[a_m, b]] = F[a_0, a_1, \ldots, a_m, b]$, ainsi $F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = F[a_0, a_1, \ldots, a_m, F[a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n]]$ et la propriété est vraie à l'ordre $m + 1$.

Convergentes d'une fraction continue

Soient p_n et q_n définis par les récurrences

$$p_0 = a_0,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et } q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Les "convergentes " de $F[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ sont les fractions $\dfrac{p_n}{q_n}$ pour $0 \leq n \leq N$.

Q2. On établit, par récurrence sur n, la relation

$$F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

On a $F[a_0] = a_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$ et $F[a_0, a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$.

Supposons la relation vraie pour $n-1$ avec $n \geq 2$.
$F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = F[a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, b_{n-1}]$ où $b_{n-1} = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}$.
Par récurrence, on a $F[a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, b_{n-1}] = \dfrac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ où $\left\{ \begin{array}{lcl} p'_{n-1} & = & b_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3} \\ q'_{n-1} & = & b_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3} \end{array} \right.$.
On obtient $p'_{n-1} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3} + \dfrac{p_{n-2}}{a_n} = p_{n-1} + \dfrac{p_{n-2}}{a_n} = \dfrac{p_n}{a_n}$. De même $q'_{n-1} = \dfrac{q_n}{a_n}$.
Ainsi $F[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$, et la relation est vraie à l'ordre n.

Q3. On établit, par récurrence sur n, la relation

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

On a $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1) - a_0 a_1 = 1$.
Supposons la relation vraie pour $n-1$ avec $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a $p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^{n-2}$.
Ainsi $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, et la relation est vraie à l'ordre n.

Q4. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= p_n(q_n - a_n q_{n-1}) - (p_n - a_n p_{n-1}) q_n \\ &= -a_n(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après **Q3**,

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

Q5. D'après **Q4**, pour $k \geq 0$, on obtient

$$\frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{a_{2k+2}}{q_{2k+2} q_{2k}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = -\frac{a_{2k+3}}{q_{2k+2} q_{2k}} < 0.$$

Ainsi les convergentes d'indices pairs $\dfrac{p_{2k}}{q_{2k}}$ forment une suite (finie) strictement croissante et les convergentes d'indices impairs $\dfrac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}$ forment une suite strictement décroissante.
Pour $k \geq 0$ et $l \geq 0$, on a donc

si $N = 2M$ est pair, $\dfrac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \dfrac{p_{2M}}{q_{2M}}$, $\quad \dfrac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}} \geq \dfrac{p_{2M-1}}{q_{2M-1}}$ et, d'après **Q3**, $\dfrac{p_{2M}}{q_{2M}} - \dfrac{p_{2M-1}}{q_{2M-1}} < 0$,

si $N = 2M+1$ est impair, $\dfrac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \dfrac{p_{2M}}{q_{2M}}$, $\quad \dfrac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}} \geq \dfrac{p_{2M+1}}{q_{2M+1}}$ et, d'après **Q3**, $\dfrac{p_{2M}}{q_{2M}} - \dfrac{p_{2M+1}}{q_{2M+1}} < 0$.

Il en résulte, dans tous les cas,

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}.$$

Fraction continue simple ($\forall j,\ a_j \in \mathbb{N}^*$)

Q6. Pour une fraction continue simple, on montre, par récurrence sur n, que $q_n > q_{n-1}$ si $n \geq 2$ puis que $q_n > n$ pour $n \geq 4$.

On a $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 \geq 1$ et $q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + q_0 > q_1$.

Supposons la relation $q_k > q_{k-1}$ vraie pour $k = n-1$ avec $n \geq 3$.
$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} + q_1 > q_{n-1}$ donc la relation est vraie à l'ordre n.
On a $q_2 \geq 2$, $q_3 \geq q_2 + 1 \geq 3$ et $q_4 \geq q_3 + q_2 \geq 5 > 4$.
Supposons la relation $q_k > k$ vraie pour $k = n-1$ avec $n \geq 5$.
$q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > (n-1) + q_3 > n$ donc la relation est vraie à l'ordre n.

Q7. Pour une fraction continue simple, les p_n et les q_n sont des entiers strictement positifs.
$\dfrac{p_0}{q_0} = a_0$ est un entier (donc une fraction irréductible).
Soit $d > 0$ un diviseur de p_n et q_n pour $n \geq 1$.
D'après **Q3**, d est un diviseur de $(-1)^{n-1}$, donc $d = 1$. Ainsi $\dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

Q8. On a $F[2,2,3] = 2 + \dfrac{1}{2+\frac{1}{3}} = \dfrac{17}{3}$ et, d'après **Q1**, $F[2,2,2,1] = F(2,2,2+\frac{1}{1}) = F[2,2,3]$.
Soit $F[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ une fraction continue simple avec N impair. L'exemple numérique suggère
si $a_N > 1$, on a $F[a_0, a_1, \ldots, a_N] = F[a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1, 1)]$
si $a_N = 1$, on a $F[a_0, a_1, \ldots, a_N] = F[a_0, a_1, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1} + 1)]$.
Il existe donc une fraction continue simple $F[b_0, b_1, \ldots, b_M]$ avec M pair ($M = N+1$ dans le premier cas et $M = N-1$ dans le second cas) telle que

$$F[a_0, a_1, \ldots, a_N] = F[b_0, b_1, \ldots, b_M].$$

Si N est pair et non nul, les mêmes transformations définissent une fraction continue simple $F[b_0, b_1, \ldots, b_M]$ avec M impair telle que $F[a_0, a_1, \ldots, a_N] = F[b_0, b_1, \ldots, b_M]$.
Si $N = 0$, la transformation ne sera possible que si $a_0 > 1$.
Nota : il paraît souhaitable d'accepter $a_0 = 0$ dans la définition d'une fraction continue simple, pour éviter cette singularité.

Q9. D'après **Q1**, pour $x = F[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ et $0 \leq n \leq N$, on a $x = F[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n]$ où $a'_n = F[a_n, a_{n+1}, \ldots, a_N]$.

$F[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n]$ et $F[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ ont des coefficients identiques, donc des convergentes identiques jusqu'à l'indice $n-1$.
D'après **Q2**, pour $2 \leq n \leq N$, on a $F[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n] = \dfrac{p'_n}{q'_n}$ avec $\begin{cases} p'_n = a'_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q'_n = a'_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$,
d'où la relation demandée.
Pour $n = 0$, on a $x = F[a'_0] = a'_0$ et pour $n = 1$, on a $x = F[a_0, a'_1] = a_0 + \dfrac{1}{a'_1} = \dfrac{a'_1 p_0 + 1}{a'_1 q_0}$.

Q10. On conserve les notations de **Q9** et on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière d'un réel r.
Si $n = N$, on a $a'_N = a_N$, donc $a_N = \lfloor a'_N \rfloor$.
Si $n = N-1$, on a $a'_n = F[a_{N-1}, a_N] = a_{N-1} + \dfrac{1}{a_N}$.
Pour $a_N > 1$, on obtient $a_{N-1} < a'_{N-1} < a_{N-1} + 1$ donc $a_{N-1} = \lfloor a'_{N-1} \rfloor$, alors que pour $a_N = 1$, $a_{N-1} = a'_{N-1} - 1 = \lfloor a'_{N-1} \rfloor - 1$.
Enfin si $n < N-1$, on a $a'_n = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a'_{n+2}}}$ donc $a_n < a'_n < a_n + 1$, puisque $a_{n+1} + \dfrac{1}{a'_{n+2}} > a_{n+1} \geq 1$. Ainsi $a_n = \lfloor a'_n \rfloor$.

Q11. Soient $F[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ et $F[b_0, b_1, \ldots, b_M]$ deux fractions continues simples ayant la même valeur x.
Dans la question **Q8**, on a vu que si $a_N = 1$ ou $b_M = 1$, on pouvait avoir $N \neq M$. On suppose désormais que $a_N > 1$ et $b_M > 1$.

On note $a'_n = F[a_n, a_{n+1}, \ldots, a_N]$ et , $b'_m = F[b_m, b_{m+1}, \ldots, b_M]$. D'après **Q10**, on a donc $a_n = \lfloor a'_n \rfloor$ et $b_m = \lfloor b'_m \rfloor$ pour tout $0 \leq n \leq N$ et $0 \leq m \leq M$.

Montrons, par récurrence sur n, que $a'_n = b'_n$ pour tout $0 \leq n \leq \min(M, N)$. Il en résultera, d'après **Q10** que $a_n = \lfloor a'_n \rfloor$ et $b_m = \lfloor b'_m \rfloor$ donc $a_n = b_n$.[1]
On a $x = a'_0 = b'_0$ (donc $a_0 = b_0 = \lfloor x \rfloor$).
Supposons que l'on ait établi l'égalité $a'_k = b'_k$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$ avec $1 \leq n < \min(M, N)$.
Des égalités $a'_n = a_n + \dfrac{1}{a'_{n+1}}$ et $b'_n = b_n + \dfrac{1}{b'_{n+1}}$, il résulte l'égalité à l'ordre $n + 1$.

Montrons maintenant que $N = M$.
Si $N < M$, on a donc $x = F[a_0, a_1, \ldots, a_N] = F[a_0, a_1, \ldots, a_N, b_{N+1}, \ldots, b_M]$.
D'après **Q1**, on a $F[a_0, a_1, \ldots, a_N, b_{N+1}, \ldots, b_M] = F[a_0, a_1, \ldots, a_N, b'_{N+1}]$, d'où la relation

$$\frac{p_N}{q_N} = \frac{b'_{N+1} p_N + p_{N-1}}{b'_{N+1} q_N + q_{N-1}}.$$

On en déduit que $b'_{N+1}(p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N) = 0$ donc $b'_{N+1} = 0$ ce qui est impossible.
Un raisonnement analogue exclut l'hypothèse $M < N$.

L'algorithme d'Euclide

A tout nombre réel $x > 0$, on associe une suite $a_0, a_1, \ldots$ définie de la façon suivante : $a_0 = \lfloor x \rfloor$; si $y_0 = x - a_0$ est nul, on s'arrête là sinon, on pose $a'_1 = \frac{1}{y_0}$, $a_1 = \lfloor a'_1 \rfloor$ et $y_1 = a'_1 - a_1$; plus généralement, si $y_{n-1} > 0$, on pose $a'_n = \frac{1}{y_{n-1}}$, $a_n = \lfloor a'_n \rfloor$ et $y_n = a'_n - a_n$.

Nota : le choix $x > 0$, confirme l'hypothèse souhaitable $a_0 \geq 0$, **qu'on adoptera désormais**.

Q12. On suppose x rationnel.

1. *Nota : dans l'énoncé, k_{n-1} doit être remplacé par k_{n+1}* .
   On établit, par récurrence sur $n \geq 1$, la relation $a'_n = \dfrac{k_n}{k_{n+1}}$ avec $k_n, k_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $k_n > k_{n+1}$.
   $y_0 = x - \lfloor x \rfloor$ est un rationnel vérifiant $0 < y_0 < 1$, ainsi $a'_1 = \dfrac{1}{y_0} = \dfrac{k_1}{k_2}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ et $k_1 > k_2$.
   On suppose la relation établie à l'ordre $n \geq 1$.
   D'après la division euclidienne, il existe q et r entiers tels que $k_n = k_{n+1} q + r$ avec $0 \leq r < k_{n+1}$. Il en résulte que $q = \lfloor a'_n \rfloor$, donc $y_n = a'_n - \lfloor a'_n \rfloor = \dfrac{r}{k_{n+1}}$.
   Si $y_n \neq 0$, alors $r > 0$ et en posant $k_{n+2} = r$, on obtient $a'_{n+1} = \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{k_{n+1}}{k_{n+2}}$: la propriété est donc vérifiée à l'ordre $n + 1$.

2. La suite d'entiers positifs $(k_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante. Si elle est infinie, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $k_{n_0} = 0$, donc $a'_{n_0} = 0$ ce qui contredit $y_{n_0 - 1} > 0$. Ainsi le processus s'arrête.
   Pour tout nombre rationnel $x > 0$, il existe donc un entier $N \geq 0$ tel que $y_N = 0$.
   Si $N = 0$ alors $x \in \mathbb{N}^*$ et x admet les deux représentations $x = F[x] = F[x - 1, 1]$.
   Si $N > 0$ alors $a_N = a'_N = \dfrac{k_N}{k_{N+1}} > 1$ et x est représentable sous la forme de la fraction continue simple $F[a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a'_N] = F[a_0, a_1, \ldots, a_N]$.
   S'il existe une autre décomposition $F[b_0, b_1, \ldots, b_M]$ de x alors $b_M = 1$ d'après **Q11**. Comme x n'est pas entier, on a donc $M > 0$.

[1] rédaction écourtée grâce une remarque de Claude Morin

D'après **Q8**, on a $x = F[b_0, b_1, \ldots, b_{M-1}+1]$. Comme $b_{M-1}+1 > 1$, il résulte à nouveau de **Q11** que $M-1 = N$, $b_i = a_i$ pour $0 \leq i \leq N-1$ et $b_N = a_N - 1$.
Ainsi x admet deux représentations possibles.

Q13. On suppose que x est irrationnel.

1. Si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est finie et a_N le dernier terme non nul, alors $x = F[a_0, a_1, \ldots, a_N] \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse sur x.

2. D'après **Q5**, les convergentes d'indices pairs $x_{2n} = \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$ forment une suite strictement croissante et les convergentes d'indices impairs $x_{2n-1} = \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ forment une suite strictement décroissante.
D'après **Q3** et **Q6**, on a $|x_{2n} - x_{2n-1}| = \dfrac{1}{q_{2n}q_{2n-1}} < \dfrac{1}{2n(2n-1)}$ dès que $n \geq 3$.
Les suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n-1})_n$ sont adjacentes donc convergentes vers une limite commune $\overline{x}$ quand $n \to +\infty$.
Il en résulte que la suite $(x_n)_n$ converge vers $\overline{x}$ quand $n \to +\infty$.

3. Pout tout n, on a $x = F[a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}, a'_{2n+2}]$, donc $x_{2n} = \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dfrac{p'_{2n+2}}{q'_{2n+2}} = x$. Il en résulte que $\overline{x} \leq x$.
De même $x = F[a_0, a_1, \ldots, a_{2n+1}, a_{2n+2}, a'_{2n+3}]$, donc $x_{2n+1} = \dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \dfrac{p'_{2n+3}}{q'_{2n+3}} = x$. Il en résulte que $\overline{x} \geq x$. Finalement
$$x = \overline{x}.$$
Nota : Il n'a pas été nécessaire d'utiliser la suite $b_0, b_1, \ldots$ associée à $\overline{x}$.

On dit que x admet une représentation en fraction continue simple infinie, notée $F[a_0, a_1, \ldots]$.
Avec cette notation, on a $a'_n = F[a_n, a_{n+1}, \ldots]$.

4. En utilisant le fait que x est entre $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, le résultat **Q3** et la croissance des q_n, on obtient
$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Q14. Avec l'aide (précieuse) d'une calculatrice, pour $x = \pi$, on obtient
$$a_0 = 3, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 15, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 292$$
qui donne
$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}.$$
Ainsi
$$3 < \frac{333}{106} < \pi < \frac{355}{113} < \frac{22}{7} \quad \text{avec } \frac{333}{106} \approx 3.141509434, \quad \frac{355}{113} \approx 3.141592920.$$

Voici un programme élémentaire Maple calculant les premiers coefficients (prévoir un `Digits` en conséquence) de la représentation en fraction continue simple d'un réel x :

```
fcs:=proc(x,n)
    local a,y,aprime,i,r;
    a:=floor(x); aprime:=x; r:=a;
    for i from 1 to n do
      y:=aprime-a;  aprime:=1/y; a:=floor(evalf(aprime));
      r:=r,a;
    od;
    r; end;
```

Nombres quadratiques

On dit qu'une fraction continue simple est "périodique" si elle est infinie, et s'il existe K tel que $a_{n+K}=a_n$ à partir d'un certain rang.

Q15 Soit $x>0$ un nombre réel représenté par une fraction continue simple périodique.

1. On a $a'_n = F[a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+K-1}, a'_{n+K}]$. En notant $\dfrac{P_k}{Q_k} = F[a_n, a_{n+1}, \dots, a_k]$, on obtient $a'_n = \dfrac{a'_{n+K}P_{n+K-1}+P_{n+K-2}}{a'_{n+K}Q_{n+K-1}+Q_{n+K-2}}$
   Pour un n assez grand, on a $a_k = a_{k+K}$ pour tout $k \geq n$, ainsi
   $$a'_{n+K} = F[a_{n+K}, a_{n+K+1}, \dots] = F[a_n, a_{n+1}, \dots] = a'_n.$$
   On a donc $a'_n = \dfrac{a'_nP_{n+K-1}+P_{n+K-2}}{a'_nQ_{n+K-1}+Q_{n+K-2}}$. Ainsi a'_n est solution de l'équation du second degré $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ non triviale où les coefficients sont les entiers
   $$\alpha = Q_{n+K-1} > 0, \quad \beta = Q_{n+K-2} - P_{n+K-1}, \quad \text{et } \gamma = -P_{n+K-2} < 0.$$
   Nota : Les coefficients ne sont pas tous positifs.

2. Soit n_0 un entier tel que $a_k = a_{k+K}$ pour tout $k \geq n_0$. L'égalité $x = F[a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}, a'_{n_0}]$ donne
   $$x = \frac{a'_{n_0}p_{n_0-1}+p_{n_0-2}}{a'_{n_0}q_{n_0-1}+q_{n_0-2}}, \quad \text{et } a'_{n_0} = \frac{xq_{n_0-2}-p_{n_0-2}}{p_{n_0-1}-xq_{n_0-1}}.$$
   a'_{n_0} est solution, d'après 1., de l'équation du second degré $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ non triviale à coefficients entiers $\alpha = q_{n_0+K-1}>0$, $\beta = q_{n_0+K-2}-p_{n_0+K-1}$ et $\gamma = -p_{n_0+K-2}<0$.
   Il en résulte que x est solution de
   $$\alpha(xq_{n_0-2}-p_{n_0-2})^2 + \beta(xq_{n_0-2}-p_{n_0-2})(p_{n_0-1}-xq_{n_0-1}) + \gamma(p_{n_0-1}-xq_{n_0-1})^2 = 0$$
   qui est une équation du second degré $at^2+bt+c=0$, à coefficients entiers.
   Si l'équation est triviale, x est solution d'une équation de degré au plus 1, donc rationnel, ce qui contredit le fait que x est représenté par une fraction continue simple périodique donc infinie.

Q16 Soient $x = F[1, 1, \dots, 1, \dots]$ et $y = F[2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, \dots]$.
$x = F[1, x] = 1 + \dfrac{1}{x}$, donc x est solution de $x^2-x-1=0$ avec $x>0$.
$y = F[2, 1, y] = \dfrac{yp_1+q_0}{xq_1+q_0}$ avec $p_0=2$, $p_1 = 2\times 1+1=3$, $q_0=1$ et $q_1=1$. y est donc solution de $y^2-2y-2=0$ avec $y>0$.
Le calcul donne
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et } y = 1+\sqrt{3}.$$

Propriété de meilleur approximation

Dans cette section, on considère la représentation en fraction continue simple infinie d'un nombre irrationnel $x>0$.

Q17. Pour $n>1$, on a $x = \dfrac{a'_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a'_{n+1}q_n+q_{n-1}}$ donc $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n(a'_{n+1}q_n+q_{n-1})}$ et
$$|p_n - q_nx| = \frac{1}{a'_{n+1}q_n+q_{n-1}}.$$

La décomposition $x-\dfrac{p}{q_n}=x-\dfrac{p_n}{q_n}+\dfrac{p_n-p}{q_n}$ donne $q_nx-p=\dfrac{(-1)^{n-1}+(p_n-p)(a'_{n+1}q_n+q_{n-1})}{a'_{n+1}q_n+q_{n-1}}$.
Pour $n>1$, on a $a'_{n+1}q_n+q_{n-1}\geq a'_{n+1}q_n+1\geq 2$, ainsi pour tout entier $p\neq p_n$, on obtient $|(-1)^{n-1}+(p_n-p)(a'_{n+1}q_n+q_{n-1})|>1$. Il en résulte que

$$|p_n-q_nx|<|p-q_nx|.$$

Q18. Soit $\dfrac{p}{q}$ une fraction rationnelle, avec $q_{n-1}<q<q_n$.

1. Le système linéaire $\left\{\begin{array}{l} p=\mu p_n+\nu p_{n-1} \\ q=\mu q_n+\nu q_{n-1}\end{array}\right.$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1}\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$.
Il est donc de Cramer et a pour solution unique les entiers

$$\mu=(-1)^{n-1}(pq_{n-1}-qp_{n-1}),\quad \text{et } \nu=(-1)^n(pq_n-qp_n).$$

Notons que $\nu\neq 0$, sinon l'égalité $q=\mu q_n$ contredit $0<q<q_n$.
Si la fraction rationnelle $\dfrac{p}{q}$ n'est pas supposée irréductible, il peut arriver que $\mu=0$ (par exemple : pour $x=\pi$, on a $q_1=7$, $q_2=106$ et $\dfrac{p}{q}=\dfrac{44}{14}$ donne $\mu=0$).
Si $\mu>0$ et $\nu>0$ alors $q\geq q_n+q_{n-1}>q_n$. Si $\mu<0$ et $\nu<0$ alors $q<0$.
Dans tous les cas, il y a contradiction avec $0<q<q_n$, ainsi des μ et ν non nuls sont de signes opposés.

2. On a $p-qx=\mu(p_n-q_nx)+\nu(p_{n-1}-q_{n-1}x)$.
x étant situé entre $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, on a p_n-q_nx et $p_{n-1}-q_{n-1}x$ de signes opposés. Il en résulte que $\mu(p_n-q_nx)$ et $\nu(p_{n-1}-q_{n-1}x)$ ont le même signe donc

$$|p-qx|=|\mu(p_n-q_nx)|+|\nu(p_{n-1}-q_{n-1}x)|.$$

On établit tout d'abord le résultat suivant *qui aurait dû être cité dans l'énoncé* [2]

$$|p_n-q_nx|<|p_{n-1}-q_{n-1}x|.$$

Le calcul en **Q17** a donné $|p_n-q_nx|=\dfrac{1}{a'_{n+1}q_n+q_{n-1}}$.
On a $a'_{n+1}q_n+q_{n-1}>q_n+q_{n-1}=(a_n+1)q_{n-1}+q_{n-2}$.
On a $a'_n=F[a_n,a'_{n+1}]=a_n+\dfrac{1}{a'_{n+1}}<a_n+1$, ainsi $a'_{n+1}q_n+q_{n-1}>a'_nq_{n-1}+q_{n-2}$ d'où l'inégalité mentionnée ci-dessus.
Comme $\nu\neq 0$, on obtient $|p-qx|>(|\mu|+|\nu|)|(p_n-q_nx)|$. L'inégalité $|\mu|+|\nu|\geq 1$ implique alors que

$$|p-qx|>|p_n-q_nx|.$$

Nota : l'hypothèse $q_{n-1}<q$ n'a pas été nécessaire.

3. Soit $\dfrac{p}{q}$ une fraction rationnelle telle que $q\leq q_n$ et $\dfrac{p}{q}\neq\dfrac{p_n}{q_n}$.
Si $q=q_n$, alors $p\neq p_n$ et d'après 1., on obtient $|p-qx|>|p_n-q_nx|$.
Si $q<q_n$, alors d'après 2., on obtient $|p-qx|>|p_n-q_nx|$.

[2] Une preuve concise de ce résultat due à Claude Morin :
d'après les relations de récurrence , on a $p_{n-1}-q_{n-1}x=p_{n+1}-q_{n+1}x-a_{n+1}(p_n-q_nx)$.
p_n-q_nx et $p_{n-1}-q_{n-1}x$ de signes opposés, x irrationnel et $a_{n+1}\geq 1$ donnent
$|p_{n-1}-q_{n-1}x|=|p_{n+1}-q_{n+1}x|+a_{n+1}|p_n-q_nx|>|p_n-q_nx|$.

Q19. Soient $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ deux convergentes consécutives de x.

x étant situé entre $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, on a
$\left|\dfrac{p_n}{q_n} - x\right| + \left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - x\right| = \left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$
On sait que $\left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| = \dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$.
Si $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - x\right| > \dfrac{1}{2q_n^2}$ et $\left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - x\right| > \dfrac{1}{2q_{n-1}^2}$, on aboutit à $\dfrac{1}{2q_n^2} + \dfrac{1}{2q_{n-1}^2} < \dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$ qui implique $(q_{n-1} - q_n)^2 < 0$ d'où la contradiction avec $q_{n-1} < q_n$.
Ainsi, parmi deux convergentes consécutives, l'une au moins satisfait

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| \leq \frac{1}{2q^2}.$$

Nota : "En utilisant la question précédente" doit être une erreur d'indication.