CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2022
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1 MP

m.laamoum@gmail.com

Exemples de contraintes symplectiques linéaires.

I Préliminaires

Q 1. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $X^\top AY = X^\top BY$ donc

$$X^\top (A-B)\,Y = 0$$

en particulier pour $X = (A-B)\,Y$ on obtient $X^\top X = \|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 = 0$ donc $X = 0$, ($\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$). Ainsi $(A-B)\,Y = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $A = B$.

Autre méthode , soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout i , j on a $e_i^\top Ae_j = A_{i,j}$, ainsi $A_{i,j} = B_{i,j}$ et $A = B$.

Q 2. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $M^{\top}M$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable et $Sp(M^{\top}M) \subset \mathbb{R}$.

De plus $\det M^{\top}M = (\det M)^2 \neq 0$ donc $Sp(M^{\top}M) \subset \mathbb{R}^*$.

Soit $\lambda \in Sp(M^{\top}M)$ et X un vecteur propre associé à λ , on a

$$\begin{aligned} \|MX\|_{\mathbb{R}^n}^2 &= (MX)^{\top}MX \\ &= X^{\top}(M^{\top}M)X \\ &= \lambda\,\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2 \end{aligned}$$

donc $\lambda \geq 0$, ainsi $Sp(M^{\top}M) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

$M^{\top}M$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée et $Sp(M^{\top}M) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

IL existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle $M^{\top}M = P.diag(\lambda_1,...,\lambda_n).P^{\top}$, soit $S = P.diag(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n}).P^{\top}$, c'est une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^{\top}M$.

II Objets symplectiques

II. A Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Q 3. Si ω est une forme symplectique sur E, alors elle est antisymétrique et pour tout vecteur x de E,

$$\omega(x,x) = -\omega(x,x) = 0.$$

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E,ω).

Q 4. Soit $y \in F$, l'application $\varphi_y : x \mapsto \omega(x,y)$ est linéaire de E vers $\mathbb{R}$, on a $F^\omega = \bigcap\limits_{y\in F} \ker \varphi_y$ donc F^ω est un sous-espace vectoriel de E.

Q 5. Soit $x \neq 0$ et $F = \mathrm{Vect}(\{x\})$, on a $\omega(x,x) = 0$ donc $F \subset F^\omega$ et F^ω n'est pas en somme directe avec F .

Q 6. d_ω est linéaire . Soit $x \in \ker d_\omega$ donc $\omega(x,\cdot) = 0$ et pour tout y dans E on a $\omega(x,y) = 0$, ω est non dégénérée donc $x = 0$.

Ainsi $\ker d_\omega = \{0\}$, comme $\dim E = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ alors d_ω est un isomorphisme.

Q 7. Soit B_F une base de F on la complète en une base B_E de E . Pour tout $u \in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$ soit $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ tel que : $\ell(x) = u(x)$ si $x \in B_F$ et $\ell(x) = 0$ si $x \in B_E \backslash B_F$, ainsi $r_F(\ell) = u$ et r_F est surjective.

Q 8. On a $r_F \circ d_\omega \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, \mathbb{R}))$. Soit $x \in \ker r_F \circ d_\omega$ donc $\forall y \in F \quad \omega(x, y) = 0$ donc $\ker r_F \circ d_\omega = F^\omega$.
De plus $\operatorname{Im} r_F \circ d_\omega = r_F\left(d_\omega(E)\right)$, d_ω est un isomorphisme et r_F est surjective donc $d_\omega(E) = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $r_F(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$, d'où $\operatorname{Im} r_F \circ d_\omega = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$, le théorème du rang donne $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.
Q 9. On a ω_F est bilinéaire et antisymétrique sur F^2 , puisque $\{x \in F \mid \forall y \in F, \omega_F(x, y) = 0\} = F \cap F^\omega$ alors ω_F est symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega = \{0\}$, comme $\dim F^\omega + \dim F = \dim E$ alors ω_F est symplectique sur F si et seulement si $F \oplus F^\omega = E$.

II. B Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

Q 10. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ω est bilinéaire donc

$$\begin{aligned}
\omega(x, y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \omega\left(e_i, e_j\right)\right) \\
&= X^\top . \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \omega\left(e_1, e_j\right), ..., \sum_{j=1}^{n} y_j \omega\left(e_n, e_j\right)\right)^\top \\
&= X^\top \Omega Y
\end{aligned}$$

Q 11. On a $\omega(e_i, e_j) = -\omega(e_j, e_i)$ donc Ω est antisymétrique .
Soit X la colonne des coordonnées d'un vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $X \in \ker \Omega$ alors pour tout y de vecteur colonne Y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x) = -Y^\top \Omega X = 0$, ω est non dégénérée donc $x = 0$, ainsi Ω est inversible.
Q 12. On a $\Omega^\top = -\Omega$ donc $\det \Omega = (-1)^n \det \Omega$, si n est impair alors $\det \Omega = 0$, Ω est inversible donc n est forcement pair.
Q 13. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec X et Y les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- $\langle ., . \rangle$ est bilinéaire , j est linéaire donc $b_s$est bilinéaire .
- On a

$$\begin{aligned}
b_s(x, y) &= X^\top J\, Y \qquad (\in \mathbb{R}) \\
&= \left(X^\top J\, Y\right)^\top \\
&= -Y^\top J\, X \qquad (J^\top = -J) \\
&= -b_s(y, x)
\end{aligned}$$

- Remarquons que $J^2 = -I_{2m}$, donc J est inversible . Si $b_s(x, y) = 0$ pour tout y , alors pour $y = j^{-1}(x)$ on a $b_s(x, y) = \langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$ et b_s est non dégénérée .

Ainsi b_s est une forme symplectique .

II. C Endomorphismes et matrices symplectiques réels

Q 14. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $\forall y \in E_\mu(u)$ **,** supposons $\lambda\mu \neq 1$,

$$\omega(u(x), u(y)) = \lambda\mu\omega(x, y) = \omega(x, y)$$

donc $\omega(x, y) = 0$, ainsi $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux .
Q 15. Soit $(x, y) \in E^2$ et X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$b_s(x, y) = X^\top J Y$$

et

$$
\begin{aligned}
b_s(u(x), u(y)) &= (MX)^\top J\,(MY) \\
&= X^\top \left(M^\top J M\right) Y
\end{aligned}
$$

Donc , u est symplectique de $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si

$$
\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^\top \left(M^\top J M\right) Y = X^\top J Y
$$

D'après **Q 1** on a : u est symplectique de $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $M\ ^\top J M = J$.

Q 16.

- $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:
  Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ de $M^\top J M = J$ on a $(\det M)^2 \det J = \det J$, donc $\det M = \pm 1$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est non vide :
  On a $I_n \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit :
  Soit M , $N \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. on a

$$
\begin{aligned}
(MN)^\top J\,(MN) &= N^\top \left(M^\top J M\right) N \\
&= N^\top J N \\
&= J\ ,
\end{aligned}
$$

  donc $MN \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
- Les éléments de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ sont symétrisables :
  Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. on a

$$
\begin{aligned}
\left(M^{-1}\right)^\top J M^{-1} &= \left(M\ J^{-} M^\top\right)^{-1} \\
&= \left(\left(M^\top\ \left(J^{-}\right)^\top M\right)^{-1}\right)^\top
\end{aligned}
$$

  Or $J^{-} = J^\top = -J$ donc $\left(M^{-1}\right)^\top J M^{-1} = J$ et $M^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
  Ainsi $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. on a

$$
\begin{aligned}
J &= \left(M^{-1}\right)\ ^\top J M^{-1} \\
&= -\left(M\ J M^\top\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

  Or $J^\top = -J$, donc $M\ J M^\top = J$ et $M^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

  Q 17. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ on a

$$
\begin{aligned}
M\ ^\top J M &= \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C^\top & -A^\top \\ D^\top & -B^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C^\top A - A^\top C & C^\top B - A^\top D \\ D^\top A - B^\top C & D^\top B - B^\top D \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow M^{\top} J M = J \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C^{\top}A - A^{\top}C = D^{\top}B - B^{\top}D = 0 \\ D^{\top}A - B^{\top}C = A^{\top}D - C^{\top}B = I_m \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(A^{\top}C\right)^{\top} - A^{\top}C = \left(B^{\top}D\right)^{\top} - B^{\top}D = 0 \\ \left(A^{\top}D - C^{\top}B\right)^{\top} = A^{\top}D - C^{\top}B = I_m \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow A^{\top}C \text{ et } B^{\top}D \text{ sont symétriques} \quad \text{et} \quad A^{\top}D - C^{\top}B = I_m.
\end{aligned}$$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

III. A Le cas de la dimension 2

Q 18. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, d'après **Q 17.** on a

$$M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow da - bc = \det M = 1$$

Ainsi $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

III. B Commutant de J

Q 19. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ on a

$$M\ J = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} \text{ et } JM = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C}_J &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -C \\ A = D \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \exists (U,V) = (A,C)\ ,\ M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Q 20. Soit $M \in \mathcal{C}_J$,
On a

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ i\ I_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -i\ I_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U+iV & -V \\ 0 & U-iV \end{pmatrix}$$

Le calcul de determinant par blocs donne

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det(U+iV)\det(U-iV) \\
&= \det(U+iV)\overline{\det(U+iV)} \\
&= |\det(U+iV)|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

III. C Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

Q 21. $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est une intersection de sous groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc c'est un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un groupe inclus dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ donc c'est un sous groupe de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

On a $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \left(M^{\top} JM, M^{\top} M \right) = (J, I_n) \right\}$, considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \left(M^{\top} JM, M^{\top} M \right) \end{array}$$

elle est continue, car la transposition est continue, elle est linéaire en dimensions finies , et le produit de deux matrice est continue , car bilinéaire en dimensions finies.

On a alors $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{(J, I_n)\}$, c'est un fermé , comme image réciproque par une application continue d'un fermé. De plus pour toute matrice M de $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ on a $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^{\top} M)} = \sqrt{n}$, ainsi $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est borné en dimension finie donc il est compact .

Q 22. Soit $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ elle vérifie

$$M^{\top} JM = J \text{ et } M^{\top} M = MM^{\top} = I_n$$

ce qui donne

$$MJ = MM^{\top} JM = JM$$

donc $M \in \mathcal{C}_J$ et $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_J$.

Q 23. Soit M de $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc $(\det M)^2 = 1$ et $\det M \geq 0$ (*d'près* **Q 20**) d'où $\det M = 1$.

Q 24. Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $S^2 = M^{\top} M$.

Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme u canoniquement associé à $M^{\top} M$, on a $u(v_i) = \lambda_i v_i$ et $s(v_i) = \sqrt{\lambda_i} v_i$ pour tout i.

Comme $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ alors $M^{\top}$ et $M^{\top} M$ sont dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, par suite u est symplectique de $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, on a $s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{\lambda_i} v_i$ et :

$$\begin{array}{rcl} b_s(s(x), s(y)) & = & \langle s(x), j(s(y)) \rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_h y_k \sqrt{\lambda_h \lambda_k} \left\langle v_h, j(v_k) \right\rangle \\ & = & \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_h y_k \sqrt{\lambda_h \lambda_k} b_s \left(v_h, v_k \right) \end{array}$$

u est symplectique donc $b_s \left(v_h, v_k \right) = 0$ si $\lambda_h \lambda_k \neq 1$ d'après **Q 14.** par suite :

$$\begin{array}{rcl} b_s(s(x), s(y)) & = & \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k, h \leq n \\ \lambda_h \lambda_k = 1}}^{n} x_h y_k b_s \left(v_h, v_k \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_h y_k b_s \left(v_h, v_k \right) \quad \text{(on rajoute un terme nul)} \\ & = & b_s(x, y) \end{array}$$

Donc s est symplectique de $(\mathbb{R}^n, b_s)$ et $S \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Q 25. On a $S \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc S est inversible .

Soit $O = MS^{-1}$, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un groupe donc $O \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, de plus

$$O^{\top} O = \left(S^{-1} \right)^{\top} M^{\top} MS^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

ainsi O appartient au groupe $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$.

Q 26. On a $\det O = 1$ donc $\det M = \det S$. $S \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ elle vérifie $SJS = J$ et $\det J \neq 0$ donc $(\det S)^2 = 1$, $\det S$ est positif car toutes les valeurs propres de S sont positives donc $\det S = 1$. et $\det M = 1$.

III. D *Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques*

*III. D.*1 Transvection symplectique

Q 27. Soit $a \in E$ un vecteur non nul , $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a,x)a \quad \forall x \in E$.
L'application $x \mapsto \omega(a,x)$ est linéaire et $\omega(a,a) = 0$ donc τ_a^λ est une transvection de E .
Soit x et y dans E , par bilinéarité de ω on a

$$\begin{aligned}\omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) &= \omega(x,y) + \lambda\omega(a,y)(\underbrace{\omega(x,a) + \omega(a,x)}_{=0}) + \lambda^2\omega(a,x)\omega(a,y)\underbrace{\omega(a,a)}_{=0} \\ &= \omega(x,y)\end{aligned}$$

donc τ_a^λ est symplectique .
Q 28. Soit $a \in E$ un vecteur non nul et λ , $\mu \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda(x) &= \tau_a^\mu(x) + \lambda\omega(a,x)\tau_a^\mu(a) \qquad (\tau_a^\mu(a) = a) \\ &= x + \mu\omega(a,x)a + \lambda\omega(a,x)a \\ &= \tau_a^{\lambda+\mu}(x).\end{aligned}$$

donc $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.
Q 29. Soient $a \in E$ un vecteur non nul et λ un réel.
On a $\det\left(\tau_a^\lambda\right) = \det(\tau_a^{\lambda/2} \circ \tau_a^{\lambda/2}) = \det(\tau_a^{\lambda/2})^2 \geq 0$.
Si $\det\left(\tau_a^\lambda\right) = 0$ alors il existe $x \neq 0$ tel que $\tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a,x)a = 0$, x est colinéaire avec a donc $\omega(a,x) = 0$ et $\tau_a^\lambda(x) = x = 0$ absurde ,
d'où $\det\left(\tau_a^\lambda\right) > 0$.
Q 30. $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1} = \tau_a^{-\lambda}$.

*III. D.*2 Un lemme

On fixe x et y, non nuls, dans E.
Q 31. Supposons que $\omega(x,y) \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$ donc

$$\begin{aligned}y &= x + \lambda\omega(y-x,x)(y-x) \\ &= x + \lambda\omega(y,x)(y-x)\end{aligned}$$

ainsi $\lambda = \frac{1}{\omega(y,x)}$. La réciproque est vraie.
Q 32. Supposons que $\omega(x,y) = 0$.
Soit $F = \text{Vect}(\{x,y\})$ il est de dimension 1 ou 2 , donc F^ω est de dimension $n-1$ ou $n-2$, soit G un supplémentaire de F^ω dans E , prenons un $z \in G\setminus\{0\}$ alors $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$.
Q 33. Soit x et y dans $E\setminus\{0\}$.
Si $\omega(x,y) \neq 0$, soit $\lambda = \frac{1}{\omega(y,x)}$ alors $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.
Si $\omega(x,y) = 0$, soit z tel que $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$, posons $\lambda = \frac{1}{\omega(z,x)}$ et $\mu = \frac{1}{\omega(y,z)}$, alors

$$\tau_{y-z}^\mu o \tau_{z-x}^\lambda(x) = y$$

Ce qui démontre le lemme.

III. D.3 Le théorème

Soit $u \in \mathrm{Symp}_{\omega}(E)$ un endomorphisme symplectique de E et $e_1 \in E$ un vecteur non nul.

Q 34. ω non dégénerée et $e_1 \neq 0$ donc il existe $x \in E$ non colinéaire à e_1 , tel que $\omega(e_1, x) \neq 0$. Soit $f_1 = \frac{1}{\omega(e_1,x)} x$, on a $\omega(e_1, f_1) = 1$ et f_1 non colinéaire à e_1 .

On pose $P = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et f_1.

Q 35. Si $u(e_1) = 0$ alors pour tout x on a $\omega(u(e_1), u(x)) = \omega(e_1, x) = 0$, ω est non degenerée donc $e_1 = 0$, ce qui est absurde , ainsi $u(e_1) \neq 0$, le lemme donne le résultat.

Q 36. Soit $\widetilde{f_1} = \delta_1(u(f_1))$, on a $\delta_1(u(e_1)) = e_1$, comme $\delta_1, u \in \mathrm{Symp}_{\omega}(E)$ alors

$$\begin{aligned} \omega\left(e_1, \widetilde{f_1}\right) &= \omega\left(\delta_1(u(e_1)), \delta_1(u(f_1))\right) \\ &= \omega(e_1, f_1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Si $\omega\left(f_1, \widetilde{f_1}\right) \neq 0$. Soit $\lambda = \frac{1}{\omega\left(f_1, \widetilde{f_1}\right)}$, alors $\tau^{\lambda}_{f_1 - \widetilde{f_1}}(\widetilde{f_1}) = f_1$ et

$$\begin{aligned} \tau^{\lambda}_{f_1 - \widetilde{f_1}}(e_1) &= e_1 + \lambda\omega(f_1 - \widetilde{f_1}, e_1)(f_1 - \widetilde{f_1}) \\ &= e_1 \qquad \left(\text{car } \omega\left(e_1, f_1 - \widetilde{f_1}\right) = 0\right) \end{aligned}$$

- Si $\omega\left(f_1, \widetilde{f_1}\right) = 0$. Soit $x_0 = e_1 + f_1$, on a $\omega(x_0, f_1) = 1$ et $\omega\left(x_0, \widetilde{f_1}\right) = 1$, forcement $x_0 \neq 0$, d'après le premier cas il existe deux transvections symplectiques τ_1 et τ_2 telles que : $\tau_1(x_0) = f_1$,$\tau_1(e_1) = e_1$, $\tau_2(\widetilde{f_1}) = x_0$ et $\tau_2(e_1) = e_1$, $\delta_2 = \tau_1 \circ \tau_2$ convient.

Ce qui prouve le résultat .

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie bien les conditions (III.1) souhaitées. On pose $v = \delta \circ u$.

Q 37. On a $v(e_1) = \delta \circ u(e_1) = e_1$ et $v(f_1) = \delta \circ u(f_1) = f_1$, donc P est stable par v et $v_P = v_{|\ P} = id_P$.

Q 38. Remarquons que $P^{\omega} = \{x \in E \mid \omega(x, e_1) = \omega(x, f_1) = 0\}$.

Soit $x \in P^{\omega}$, on a

$$\omega(v(x), e_1) = \omega(v(x), v(e_1)) = \omega(x, e_1) = 0$$

et

$$\omega(v(x), f_1) = \omega(v(x), v(f_1)) = \omega(x, f_1) = 0$$

donc P^{ω} est stable par v.

Q 39. Soit $\omega_{P^{\omega}}$ la restriction de ω à $P^{\omega} \times P^{\omega}$. On a $P \cap P^{\omega} = \{0\}$ donc $E = P \oplus P^{\omega}$, d'après **Q 9.** $\omega_{P^{\omega}}$ définit une forme symplectique sur P^{ω} .

Soit $x, y \in P^{\omega}$, on a

$$\begin{aligned} \omega_{P^{\omega}}(v_{P^{\omega}}(x), v_{P^{\omega}}(y)) &= \omega(v(x), v(y)) \quad (\text{ car } P^{\omega} \text{ stable par } v) \\ &= \omega(x, y) \qquad (\text{ car } v \text{ est symplectique}) \\ &= \omega_{P^{\omega}}(x, y) \end{aligned}$$

donc $v_{P^{\omega}}$est un endomorphisme symplectique sur P^{ω}.

Q 40. Soit u un endomorphisme symplectique de (E, ω).

On fait une récurrence sur m tel que $\dim E = 2m$.

- Si $m=1$ alors $E=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$ avec $\omega(e_1,e_2)=1$, d'après **Q 36.**il existe δ composée d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que $\delta(u(e_1))=e_1$ et $\delta(u(e_2))=e_2$, ainsi $u=\delta^{-1}$, ce qui prouve le cas $m=1$.

- On suppose le résultat vrai pour $2m$, soit E de dimension $2(m+1)$ et $P=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)\subset E$ avec $\omega(e_1,e_2)=1$.
  Soit δ composée d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que $\delta(u(e_1))=e_1$ et $\delta(u(e_2))=e_2$ et $v=\delta ou$.
  On a $E=P\oplus P^\omega$, $v_P=id_P$ et v_{P^ω}est un endomorphisme symplectique sur P^ω , d'après l'hypothèse de récurrence $v_{P^\omega}=\tau_p\circ\cdots\circ\tau_1$ avec $p\leq 4m$ et $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p$ des transvections symplectiques de P^ω .
  Pour tout i il existe $a_i\in P^\omega$ et $\lambda_i\in\mathbb{R}$ tels que $\tau_i=\tau_{a_i}^{\lambda_i}$, qui se prolonge en $\widetilde{\tau_i}$ transvections symplectique sur E , par $\widetilde{\tau_i}(x)=x$ si $x\in P$.
  On obtient alors $u=\delta^{-1}\circ\widetilde{\tau_p}\circ\cdots\circ\widetilde{\tau_1}$, d'où le résultat.

*III. D.*4 Une conséquence topologique

Q 41. Soit $M\in\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ alors u l'endomorphisme canoniquement associé à M ,s'écrit de la forme
$u=\tau_{a_1}^{\lambda_1}\circ\cdots\circ\tau_{a_p}^{\lambda_p}$ ave $p\leq 4m$. Par suite $M=T_{a_1}^{\lambda_1}\circ\cdots\circ T_{a_p}^{\lambda_p}$, avec $T_{a_i}^{\lambda_i}$ la matrice de $\tau_{a_i}^{\lambda_i}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si $B=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $a=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$ alors

$$T_a^\lambda=(\delta_{i,j}+\lambda\omega(a,e_j)a_i)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$$

qui est continue par rapport à λ.
Le produit de p matrices est continue (il est p linéaire en dimensions finies) donc l'application

$$\begin{array}{cccc}\varphi_M: [0,1] & \to & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & T_{a_1}^{t\lambda_1}\circ\cdots\circ T_{a_p}^{t\lambda_p}\end{array}$$

est continue et $\varphi_u(0)=I_n$ et $\varphi_u(1)=M$.
Pour $N\in\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, l'application

$$\begin{array}{ccc}\Phi: [0,1] & \to & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & \begin{cases}\varphi_M(1-2t) \text{ si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \varphi_N(2t-1) \text{ si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}\end{array}$$

est continue et $\Phi(0)=M$ et $\Phi(1)=N$. Ainsi $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs .

*III. D.*5 Deuxième conséquence

Q 42. Si $M\in\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ alors $\det M=\pm1$, et on a $M=T_{a_1}^{\lambda_1}\circ\cdots\circ T_{a_p}^{\lambda_p}$, avec $T_{a_i}^{\lambda_i}$ des matrices de transvection symplectique donc $\det T_{a_i}^{\lambda_i}>0$ par suite $\det M>0$ ce qui prouve que $\det M=1$ et $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\subset\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

On fixe $n=2m\geqslant 4$.

IV. A Injection par $u\in SL\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans un cylindre

Q 43. $B=(e_1,\ldots,e_m,e'_1,\ldots,e'_m)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ définit par :

$$u(e_i)=re_i\ ,u(e_{i+1})=\frac{1}{r}e_{i+1} \text{ si } i\in\{1,m+1\} \text{ et } u(e_i)=e_i \text{ si non}$$

on vérfie facilement que $u\in\mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ et $u\left(B^{2m}(1)\right)\subset Z^{2m}(r)$.

IV. B Injection par $u \in SL\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans une autre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ vérifiant $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de la matrice U la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.

Q 44. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, soit X un vecteur propre de U, de norme 1, associé à λ.

$X \in B^{2m}(1)$ donc $UX = \lambda X \in B^{2m}(r)$, par suite $\|\lambda X\| = |\lambda| \leq r$.

Si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, soit $Z = P + iQ$ un vecteur propre de U, associé à λ.Posons $P = (p_1, \ldots, p_{2m})$ et $Q = (q_1, \ldots, q_{2m})$.

On a

$$\begin{aligned} UP + iUQ &= (\alpha + i\beta)(P + iQ) \\ &= (\alpha P - \beta Q) + i(\beta P + \alpha Q) \end{aligned}$$

donc

$$UP = \alpha P - \beta Q \ \text{ et } UQ = \beta P + \alpha Q$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \|UP\|^2 + \|UQ\|^2 &= \|\alpha P - \beta Q\|^2 + \|\beta P + \alpha Q\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{2m} (\alpha p_k - \beta q_k)^2 + (\beta p_k + \alpha q_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{2m} \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(p_k^2 + q_k^2\right) \\ &= |\lambda|^2 \left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right) \end{aligned}$$

De l'inclusion $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$ on a $\|UP\| \leq r\|P\|$ et $\|UQ\| \leq r\|Q\|$ d'où $|\lambda| \leq r$.

Q 45. On a $1 = \det u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda \leq r^{2m}$ donc $1 \leq r$.

Q 46. Si $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$ alors $1 \leq r$.

Réciproquement si $1 \leq r$ alors $B^{2m}(1) \subset B^{2m}(r)$, on prend $u = id$.

IV. C Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Soit $r > 0$ tel qu'il existe un endomorphisme symplectique $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ vérifiant $\psi\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(r)$.

On note $M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ la matrice de ψ dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ de $\mathbb{R}^{2m}$ et $\psi^\top$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M^\top$.

Q 47. On a $\psi^\top \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ donc

$$\begin{aligned} b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right) &= b_s(e_1, f_1) \\ &= \langle e_1, j(f_1)\rangle \qquad (\, j(f_1) = -e_1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

d'où $\left|b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)\right| = 1$.

L'inégalité de Cauchy -Schwartz donne

$$\left|b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)\right| = \left|\left\langle \psi^\top(e_1), j(\psi^\top(f_1))\right\rangle\right| \leq \left\|\psi^\top(e_1)\right\| \left\|j(\psi^\top(f_1)\right\|$$

et on a $J^\top J = I_{2m}$, j est un endomorphisme orthogonal, donc

$$1 = \left|b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)\right| \leq \left\|\psi^\top(e_1)\right\| \left\|\psi^\top(f_1)\right\|$$

on en déduit que $\left\|\psi^{\top}(e_1)\right\| \geqslant 1$ ou $\left\|\psi^{\top}(f_1)\right\| \geqslant 1$.

Q 48. Posons $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2m}$, soit $X = (x_1, ..., x_{2m})^{\top} \in \mathbb{R}^{2m}\setminus\{0\}$, $\frac{1}{\|X\|}X \in B^{2m}(1)$ donc $\frac{1}{\|X\|}MX \in Z^{2m}(r)$.
On a $MX = (\sum\limits_{j=1}^{2m} a_{1,j}x_j, ..., \sum\limits_{j=1}^{2m} a_{2m,j}x_j)^{\top}$ donc

$$\left(\sum_{j=1}^{2m} a_{1,j}x_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2m} a_{m+1,j}x_j\right)^2 \leq r\sum_{j=1}^{2m} x_j^2$$

en particulier pour $x_j = a_{1,j}\ \forall j$, on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^{2m} a_{1,j}^2\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{2m} a_{1,j}^2\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2m} a_{m+1,j}a_{1,j}\right)^2 \leq r\sum_{j=1}^{2m} a_{1,j}^2$$

Comme $M^{\top}X = (\sum\limits_{j=1}^{2m} a_{j,1}x_j, ..., \sum\limits_{j=1}^{2m} a_{j,2m}x_j)^{\top}$ alors $\sum\limits_{j=1}^{2m} a_{1,j}^2 = \left\|\psi^{\top}(e_1)\right\|^2 \neq 0$ car ψ est bijective .
Ainsi

$$\left\|\psi^{\top}(e_1)\right\| \leq r$$

De même pour $x_j = a_{m+1,j}\ \forall j$, on obtient

$$\left\|\psi^{\top}(f_1)\right\| \leq r$$

Finalement $1 = \max(\left\|\psi^{\top}(e_1)\right\|, \left\|\psi^{\top}(f_1)\right\|) \leq r$.

Q 49. Soit $R > 0$, $R' > 0$ et $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ telque $\psi\left(B^{2m}(R)\right) \subset Z^{2m}(R')$.
Pour tout $x \in B^{2m}(1)$ on a $Rx \in B^{2m}(R)$ donc $\psi(Rx) \in Z^{2m}(R')$ ce qui donne $\psi(x) \in Z^{2m}(R'/R)$, par suite $\psi\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(R'/R)$, la question **Q 49.** donne $R \leqslant R'$.
Réciproquement , si $R \leqslant R'$ alors $B^{2m}(R) \subset B^{2m}(R') \subset Z^{2m}(R')$.
Ce qui montre le théorème de non-tassement linéaire

• • • FIN • • •