

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Centrale I, 2025, filière PC.
Version provisoire du 01/05/2025

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Un principe d'incertitude matriciel

Partie A - Autour du principe d'incertitude d'Heisenberg

I - Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde

Q1. Immédiat par linéarité de la dérivation.

Q2. Si $\lambda > 0$, $E_\lambda(l) = \text{Vect}(x \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}x), x \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}x))$.

Si $\lambda = 0$, $E_0(l) = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$.

Ceci montre que $\mathbb{R}_+ \subset \text{VP}(l)$.

II - Cas des fonctions gaussiennes

Q3. La fonction $t \mapsto G_a(t)e^{-i\xi t}$ est continue sur \mathbb{R} et lorsque t tend vers $\pm\infty$, on a, par croissances comparées car $a > 0$:

$$|G_a(t)e^{-i\xi t}| = e^{-at^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Donc $t \mapsto G_a(t)e^{-i\xi t}$ est intégrable sur \mathbb{R} par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente. En particulier, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)e^{-i\xi t} dt$ est convergente car absolument convergente.

Q4. Pour $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$, notons

$$h(t, \xi) = G_a(t)e^{-i\xi t}.$$

Pour tout t fixé,

$$\xi \mapsto h(t, \xi)$$

est de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial h}{\partial \xi}(t, \xi) \right| = |t|e^{-at^2/2} = \varphi(t).$$

La fonction φ est indépendante de ξ , intégrable sur \mathbb{R} (car négligeable devant $1/t^2$ en $\pm\infty$) : le théorème de \mathcal{C}^1 dérivation des intégrales à paramètre implique que \widehat{G}_a est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}'_a(\xi) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-at^2/2} e^{-i\xi t} dt.$$

Q5. Par intégration par partie, on a

$$\widehat{G}'_a(\xi) = -i \left(\left[-\frac{1}{a} e^{-at^2/2} e^{-i\xi t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2/2} i\xi e^{-i\xi t} dt \right).$$

Or,

$$\left| e^{-at^2/2} e^{-i\xi t} \right| = e^{-at^2/2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0.$$

De là,

$$\widehat{G}'_a(\xi) = -\frac{\xi}{a} \widehat{G}_a(\xi).$$

On en déduit que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G}_a(\xi) = \widehat{G}_a(0)e^{-\xi^2/2a} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\xi^2/2a} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}G_{1/a}(\xi).$$

Q6. Les fonctions

$$u \mapsto G_a^2(u) = e^{-au^2} = G_{2a}(u)$$

et

$$u \mapsto G_a^2(u) = u^2 e^{-au^2} = u^2 G_{2a}(u)$$

sont bien intégrables sur \mathbb{R} (continues et négligeables devant $1/u^2$ en $\pm\infty$). De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{2a}(u) du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Et à nouveau par intégration par partie,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u) du &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-au^2} du \\ &= \left[-\frac{e^{-au^2}}{2a} u \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{e^{-au^2}}{2a} du \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{2a}(u) du \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

Q7. On a d'une part

$$\sigma_F^2(G_a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{2\pi}{a} G_{1/a}^2(u) du = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \frac{2\pi}{a} \frac{a}{2} \sqrt{\pi a} = \frac{a}{2}.$$

Et d'autre part,

$$\sigma_T^2(G_a) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2a}.$$

Comme

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{4\frac{a}{2}},$$

on a bien $\sigma_T^2(G_a) = \gamma(\sigma_F^2(G_a))$.

Partie B - Laplacien d'une matrice

I - Etude d'un élément de \mathcal{G}

Q8. On a $\delta(B) = I_4$ et donc

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et de suite $\text{rg}(L_B) = 2$ (car $C_1 + C_4 = C_2 + C_3 = 0$ et (C_1, C_2) est libre).

Q9. D'après ce qui précède, 0 est valeur propre double et

$$E_0(L_B) = \text{Ker}(L_B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de problème : $\chi_{L_B}(X) = X^2(X-2)^2$. Les valeurs propres de L_B sont donc $\boxed{0 \text{ et } 2 \text{ et ce sont deux valeurs propres doubles}}$. Enfin,

$$E_2(L_B) = \text{Ker}(L_B - 2I_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Q10. La matrice L_B est symétrique réelle, ses deux valeurs propres sont ≥ 0 donc $\boxed{L_B \in S_4^+(\mathbb{R})}$. Comme L_B n'est pas inversible, on a $\boxed{L_B \notin S_4^{++}(\mathbb{R})}$.

II - Étude du noyau des éléments de \mathcal{G}

Q11. La l -ième composante du vecteur $L_A 1_N$ est égale à

$$\sum_{k=1}^N a_{l,k} - \sum_{k=1}^N a_{l,k} = 0$$

donc $\boxed{L_A 1_N = 0}$ et donc $\boxed{\text{Vect}(1_N) \subset \text{Ker}(L_A)}$.

La matrice B des questions précédentes montre qu'il n'y a pas égalité en général.

Q12. On a

$$x^T \delta(A)x = \sum_{1 \leq i, j \leq N} (\delta(A))_{i,j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i \leq N} (\delta(A))_{i,i} x_i^2 = \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N a_{i,k} x_i^2 = \sum_{1 \leq i, k \leq N} a_{i,k} x_i^2.$$

Q13. On en déduit que

$$x^T L_A x = x^T \delta(A)x - x^T A x = \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j} x_i^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j} x_i x_j.$$

Comme A est symétrique de diagonale nulle, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j} x_i x_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} x_i x_j$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{i,j} x_i^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} x_i^2 + \sum_{1 \leq j < i \leq N} a_{i,j} x_i^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} x_i^2 + \sum_{1 \leq j < i \leq N} a_{j,i} x_i^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} x_j^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} (x_i^2 + x_j^2). \end{aligned}$$

De là,

$$x^T L_A x = \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} (x_i - x_j)^2.$$

Et à nouveau par symétrie de la matrice A ,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq N} a_{i,j}(x_i - x_j)^2.$$

Q14. D'après ce qui précède, les $a_{i,j}$ étant positifs puisque valant 0 ou 1, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, x^T L_A x \geq 0$$

et donc que $L_A \in S_N^+(\mathbb{R})$.

Q15. Soit $x \in \text{Ker}(L_A)$. D'après **13**, on a

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, N \rrbracket, a_{k,l}(x_k - x_l)^2 = 0.$$

Soient $i \neq j$ et soient i_1, \dots, i_n tels que $i_1 = i$, $a_{i_k, i_{k+1}} = 1$ pour tout k et $i_n = j$. On a alors $(x_{i_k} - x_{i_{k+1}})^2 = 0$ et donc

$$x_i = x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = x_{i_{k+1}} = \dots = x_{i_n} = x_j.$$

Toutes les composantes de x sont donc égales, ce qui montre que $x \in \text{Vect}(1_N)$ et avec **Q11** que

$$\text{Vect}(1_N) = \text{Ker}(L_A).$$

Partie C - Région de faisabilité, courbe d'incertitude

I - Définitions de σ_M^2 et σ_S^2

Q16. La matrice A est bien sûr un élément de \mathcal{G} . Vérifions la propriété (I). Soient $i \neq j$.

Si i et j sont différents de 1, on a

$$a_{i,1} = a_{1,j} = 1$$

et donc $i_1 = i, i_2 = 1, i_3 = j$ conviennent.

Si $i = 1$ et $j \neq 1$, on a $a_{i,j} = 1$ donc $i_1 = i$ et $i_2 = j$ conviennent. Et il en est de même si $j = 1$ et $i \neq 1$.

Q17. Comme L_A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur \mathbb{R} . En utilisant ce qui précède, 0 est valeur propre de multiplicité 1 et les autres valeurs propres sont > 0 . On peut donc bien écrire les valeurs propres de L_A de sorte que

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N.$$

Q18. On a de suite

$$L_A = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$L_A - I_N = \begin{pmatrix} N-2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\text{rg}(L_A - I_N) = 2$. Ainsi

- 0 est valeur propre simple de L_A ,
- 1 est valeur propre de multiplicité $N - 2$ de L_A ,

- la "dernière" valeur propre de L_A est donnée par la trace :

$$\lambda_N + N - 2 + 0 = 2N - 2,$$

donc $\lambda_N = N \geq 2$ est la dernière valeur propre et elle est simple, ce qui implique que $\dim E_{\lambda_N}(L_A) = 1$.

Le spectre de L_A est donc

$$\boxed{0 = \lambda_1 < \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1} = 1 < \lambda_N = N}.$$

Q19. En décomposant x dans une base orthonormée (v_1, \dots, v_n) de vecteurs propres de L_A , on a

$$x = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \text{ et } x^T L_A x = \sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha_i^2.$$

On en déduit de suite que

$$0 = \lambda_1 \leq \sigma_S^2(x) \leq \lambda_N,$$

que

$$\sigma_S^2(x) = \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow x \in E_{\lambda_1}(L_A) = \text{Ker}(L_A)$$

et que

$$\sigma_S^2(x) = \lambda_N \Leftrightarrow x \in E_{\lambda_N}(L_A).$$

L'égalité $\boxed{\sigma_S^2(\mu x) = \sigma_S^2(x)}$ découle immédiatement de l'homogénéité de la norme.

II - Région de faisabilité

Q20. Comme en **Q19.**, les valeurs propres de D étant 0 ou 1, on a

$$\forall x \neq 0, 0 \leq \sigma_S^2(x) \leq \lambda_N \text{ et } 0 \leq \sigma_M^2(x) \leq 1,$$

ce qui signifie exactement que $\boxed{\mathcal{R} \subset [0, \lambda_N] \times [0, 1]}$.

Q21. Comme $\sigma_S^2(x) = 0$, on a $x \in \text{Ker}(L_A) = \text{Vect}(1_n)$ et donc

$$\sigma_M^2(x) = \sigma_M^2(1_n) = \frac{(N-1) \times 1}{N \times 1^2} = \frac{N-1}{N}.$$

On en déduit que \mathcal{R} intersecte la droite d'équation $s = 0$ en un unique point, le point de coordonnées

$$\boxed{\left(0, \frac{N-1}{N}\right)}.$$

Q22. Soit x tel que $\sigma_S^2(x) = \lambda_N = N$, on a

$$x \in \text{Ker}(L_A - \lambda_N I_N) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} N-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Et donc

$$\sigma_M^2(x) = \frac{(N-1) \times (-1)^2}{(N-1)^2 + (N-1) \times (-1)^2} = \frac{1}{N}.$$

On en déduit que \mathcal{R} intersecte la droite d'équation $s = \lambda_N$ en un unique point, le point de

coordonnées $\boxed{\left(N, \frac{1}{N}\right)}$.

Soit x tel que $\sigma_M^2(x) = 0$, alors

$$x \in \text{Ker}(D) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Et donc

$$\sigma_S^2(x) = \frac{N-1}{1^2} = N-1.$$

On en déduit que \mathcal{R} intersecte la droite d'équation $m = 0$ en un unique point, le point de coordonnées $\boxed{(N-1, 0)}$.

III - La courbe d'incertitude γ_-

Q23. Comme L_A est symétrique, les vecteurs e_1 et e_N sont orthogonaux, donc

$$\|x_t\|^2 = (1-t)^2 + t^2 > 0$$

donc $x_t \neq 0$ et $\boxed{\varphi : t \mapsto \sigma_S^2(x_t) \text{ est bien définie.}}$

Cette fonction est continue, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \lambda_N$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $s \in [0, \lambda_N]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\boxed{\varphi(t) = \sigma_S^2(x_t) = s}$, ce qui fournit le résultat.

Q24. L'ensemble

$$K_s = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sigma_S^2(x) = s \text{ et } \|x\| = 1\}$$

est une partie compacte et non vide de \mathbb{R}^N : elle est fermée comme intersection de deux fermés, la sphère unité et l'image réciproque du singleton $\{s\}$ par la fonction continue σ_S^2 , elle est bien sûr bornée et elle est non vide d'après **Q23**. D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction continue σ_M^2 , $\boxed{\text{la quantité } \min_{x \in K_s} \sigma_M^2(x) \text{ est bien définie.}}$

Q25. Soient $s_1, s_2 \in [0, \lambda_N]$ et $t \in [0, 1]$. Soit x_1 de norme 1 tel que

$$\gamma_-(s_1) = \sigma_M^2(x_1) = \min_{x \in K_{s_1}} \sigma_M^2(x)$$

et soit x_2 de norme 1 tel que

$$\gamma_-(s_2) = \sigma_M^2(x_2) = \min_{x \in K_{s_2}} \sigma_M^2(x).$$

Par définition de \mathcal{R} , les couples $(s_1, \gamma_-(s_1))$ et $(s_2, \gamma_-(s_2))$ sont deux éléments de \mathcal{R} . Comme \mathcal{R} est convexe, le couple

$$(ts_1 + (1-t)s_2, t\gamma_-(s_1) + (1-t)\gamma_-(s_2))$$

appartient à \mathcal{R} . Il existe donc $x \in \mathbb{R}^N$, que l'on peut supposer de norme 1, tel que

$$(ts_1 + (1-t)s_2, t\gamma_-(s_1) + (1-t)\gamma_-(s_2)) = (\sigma_S^2(x), \sigma_M^2(x)).$$

En particulier,

$$\gamma_-(ts_1 + (1-t)s_2) \leq \sigma_M^2(x) = t\gamma_-(s_1) + (1-t)\gamma_-(s_2),$$

ce qui signifie exactement que $\boxed{\gamma_- \text{ est convexe sur } [0, \lambda_N]}$.

Partie D - Formule explicite pour la courbe d'incertitude γ_-

Q26. On a d'une part :

$$\mu_\alpha^- = y^T M(\alpha) y = \min_{\|x\|=1} x^T M(\alpha) x.$$

D'autre part, si x de norme 1 vérifie $\sigma_S^2(x) = \sigma_S^2(y)$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_M^2(y) &= y^T D y \\ &= y^T M(\alpha) y + \alpha y^T L_A y \\ &\leq x^T M(\alpha) x + \alpha y^T L_A y \\ &= x^T M(\alpha) x + \alpha x^T L_A x \\ &= x^T D x \\ &= \sigma_M^2(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma_M^2(y) \leq \gamma_-(\sigma_S^2(y))$ et l'inégalité $\sigma_M^2(y) \geq \gamma_-(\sigma_S^2(y))$ est évidente donc $\boxed{\sigma_M^2(y) = \gamma_-(\sigma_S^2(y))}$.

Q27. On a

$$M(\alpha) - (1 - \alpha)I_N = \begin{pmatrix} \alpha(2 - N) - 1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les colonnes de $M(\alpha) - (1 - \alpha)I_N$ sont égales sauf les deux premières qui forment une famille libre, donc $\boxed{\text{rg}(M(\alpha) - (1 - \alpha)I_N) = 2}$. On en déduit que $1 - \alpha$ est valeur propre de multiplicité $N - 2$ de $M(\alpha)$ et en particulier que $\boxed{\mu_\alpha^- \leq 1 - \alpha \leq \mu_\alpha^+}$.

Q28. Comme

$$x \mapsto (x - a)(x - b) + \lambda(x - c)$$

est à racines réelles, le discriminant de ce polynôme est ≥ 0 . On en déduit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, ((a + b)^2 - \lambda)^2 - 4(ab - \lambda c) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 - 2((a + b) - 2c)\lambda + (a - b)^2 \geq 0.$$

Le discriminant de ce polynôme en λ est donc ≤ 0 , ce qui donne

$$((a + b) - 2c)^2 - (a - b)^2 \leq 0$$

ou encore

$$4(b - c)(a - c) \leq 0.$$

Comme $a \leq b$, cette dernière inégalité implique que $\boxed{c \in [a, b]}$.

Q29. En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\boxed{\chi_{N(\lambda)}(X) = \chi_{M(\alpha)}(X) + \lambda(X + \alpha - 1)^{N-1}}.$$

Comme $1 - \alpha$ est racine de multiplicité $N - 2$ de $\chi_{M(\alpha)}$, on peut écrire

$$\chi_{N(\lambda)}(X) = (X + \alpha - 1)^{N-2} ((X - a)(X - b) + \lambda(X + \alpha - 1))$$

où a et b sont les deux autres valeurs propres de $M(\alpha)$ que l'on ordonne de sorte que $a \leq b$.

Comme $N(\lambda)$ est symétrique réelle pour tout λ , son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} et donc

$$((X - a)(X - b) + \lambda(X + \alpha - 1))$$

est scindé sur \mathbb{R} . On en déduit à l'aide de **Q28** que $1 - \alpha \in [a, b]$ et plus précisément que $1 - \alpha \in]a, b[$. Ceci implique que $a = \mu_\alpha^-$ et que $b = \mu_\alpha^+$ et finalement que

$$\boxed{\mu_\alpha^- < 1 - \alpha < \mu_\alpha^+}.$$

Q30. Comme intersection de deux hyperplans distincts, V est un sous-espace vectoriel de dimension $N - 2$ de \mathbb{R}^N . Une base de V est par exemple

$$\boxed{(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \dots, e_2 - e_N)}$$

où les e_i désignent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^N .

Q31. En utilisant **Q27** et **Q30**, on observe que

$$V = E_{1-\alpha}(M(\alpha)).$$

Comme $M(\alpha)$ est symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale, ce qui montre que

$$E_{\mu_\alpha^-}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_\alpha^+}(M(\alpha)) = V^\perp.$$

Comme les vecteurs e_1 et $e_2 + \dots + e_N$ sont clairement orthogonaux à tous les vecteurs de la base de V précédemment trouvée, on en déduit que

$$E_{\mu_{\alpha}^{-}}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_{\alpha}^{+}}(M(\alpha)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

Q32. En utilisant **Q13**, on a

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(x(\theta)) &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} (x_i(\theta) - x_j(\theta))^2 \\ &= \sum_{j=2}^N \left(\cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sin(\theta) \right)^2 \\ &= (N-1) \left(\cos^2(\theta) - \frac{2}{\sqrt{N-1}} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{1}{N-1} \sin^2(\theta) \right) \\ &= (N-1) \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} - \frac{2}{\sqrt{N-1}} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{1}{N-1} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) \\ &= \frac{(N-1) + (N-1) \cos(2\theta) + 1 - \cos(2\theta)}{2} - \sqrt{N-1} \sin(2\theta) \\ &= \frac{N + (N-2) \cos(2\theta)}{2} - \sqrt{N-1} \sin(2\theta) \\ &= \boxed{\frac{N}{2} + \frac{N-2}{2} \cos(2\theta) - \sqrt{N-1} \sin(2\theta)}. \end{aligned}$$

Q33. On a immédiatement

$$\sigma_M^2(x(\theta)) = (N-1) \frac{1}{N-1} \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

De là,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sigma_M^2(x(\theta)),$$

puis à l'aide de **Q32**,

$$-\sqrt{N-1} \sin(2\theta) = \sigma_S^2(x(\theta)) - \frac{N}{2} - \frac{N-2}{2} + (N-2)\sigma_M^2(x(\theta)) = \sigma_S^2(x(\theta)) - (N-1) + (N-2)\sigma_M^2(x(\theta)).$$

Finalement

$$-\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (\sigma_S^2(x(\theta)) + (N-2)\sigma_M^2(x(\theta)) - (N-1)).$$

Q34. Immédiat en utilisant ce qui précède et l'identité

$$(N-1)(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) = N-1.$$

Q35. *Avertissement : je n'ai pas vérifié tous les détails des affirmations qui suivent. Je donne les grandes lignes de ce que je pense être le raisonnement attendu. Il se peut que je sois passé à côté d'un argument plus simple et plus rapide.*

- On remarque tout d'abord que $E_{\mu_{\alpha}^{-}}(M(\alpha)) \oplus E_{\mu_{\alpha}^{+}}(M(\alpha)) = V^{\perp}$ est indépendant de α et est égal à $E_{\lambda_1}(L_A) \oplus E_{\lambda_N}(L_A)$.
- Soit $s \in [0, \lambda_N]$. D'après **Q23** et ce qui vient d'être dit, il existe θ tel que $\sigma_S^2(x(\theta)) = s$.
- Pour ce θ , il existe α tel que $x(\theta) \in E_{\mu_{\alpha}^{-}}(M(\alpha))$ (c'est ce point particulier que je n'ai pas vérifié mais il suffit probablement de regarder la matrice de taille 2 de l'endomorphisme induit par $M(\alpha)$ sur V^{\perp} dans une base orthonormée).
- D'après **Q26**, on a $\sigma_M^2(x(\theta)) = \gamma_{-}(\sigma_S^2(x(\theta))) = \gamma_{-}(s)$.

- En résolvant l'équation du second degré obtenue en **Q34**, on obtient (*l'énoncé contient une erreur de signe*) :

$$\gamma_-(s) = \sigma_M^2(x(\theta)) = \frac{-s(N-2) + N(N-1) \pm 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}}{N^2}.$$

- Le fait que γ_- est convexe implique enfin le choix du signe et l'on obtient

$$\boxed{\gamma_-(s) = \sigma_M^2(x(\theta)) = \frac{-s(N-2) + N(N-1) - 2\sqrt{s(N-1)(N-s)}}{N^2}.}$$

*Page suivante les détails pour **Q35** aimablement fournis par ma collègue Violaine Strecker.*

On définit de manière analogue δ_+ et $\delta = \delta_+ \cup \delta_-$.

Par analogie: δ_+ concave.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y \in E_{\mu_\alpha^+}(\alpha) \cap \{y \mid \|y\| = 1\}, \sigma_{\alpha}^2(y) = \delta_+^2(\sigma_S^2(y)).$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$$\text{Soit } \alpha \in [0, \lambda_N]; \exists \theta \in \mathbb{R} \mid \lambda = \sigma_S^2(\alpha(\theta)).$$

Par $\alpha \in \mathbb{R}$, on note φ_α l'endomorphisme par D - α LA sur V^\perp .

$$\text{Mat } \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha(1-N) & \alpha\sqrt{N-1} \\ \alpha\sqrt{N-1} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha(\theta) \text{ rep de } \varphi_\alpha \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos \theta & \alpha(1-N)\cos \theta + \alpha\sqrt{N-1}\sin \theta \\ \sin \theta & \alpha\sqrt{N-1}\cos \theta + (1-\alpha)\sin \theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\sqrt{N-1}\cos(2\theta) + \frac{N-2}{2}\sin(2\theta)) = -\frac{\alpha^2(2\theta)}{2}.$$

Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha(\theta) \in E_{\mu_\alpha^+}(\alpha) \cup E_{\mu_\alpha^-}(\alpha)$ sauf pour un nombre fini de θ dans $[0, \pi[$.

$$\text{Donc } \sigma_{\alpha}^2(\alpha(\theta)) = \delta_-^2(\sigma_S^2(\alpha(\theta))) \text{ ou } \delta_+^2(\sigma_S^2(\alpha(\theta))).$$

Sauf pour un nombre fini de θ .

δ_- continue donc continue sur $]0, \lambda_N[$

d'où la formule de Q35 sur $]0, \lambda_N[$.

Pour $\lambda=0$ et $\lambda=N$, on peut utiliser Q22... ça marche!