

# CCP 2003 - Math 2 PC

Titre : Produits infinis et fonction Gamma.

## PARTIE I

Pour tout nombre réel  $u \in ]0, 1[$ , on définit la fonction  $\varphi_u$  de la variable réelle  $t$  par :

- Pour tout  $t \in [-\pi, \pi[$ ,  $\varphi_u(t) = \cos ut$ ,
- La fonction  $\varphi_u$  est périodique de période  $2\pi$ .

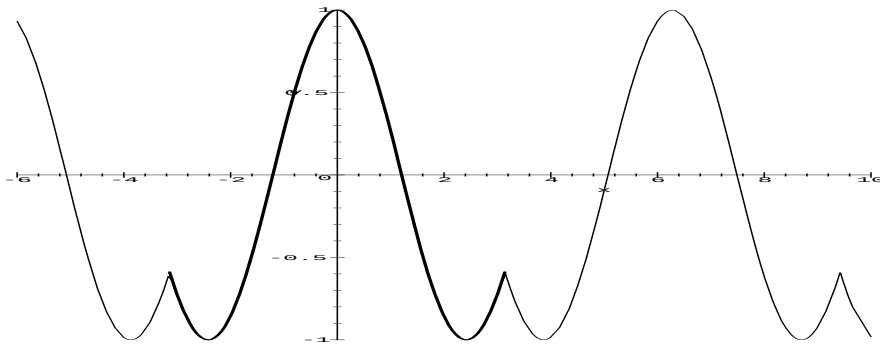


FIG. 1 – graphe de  $\varphi(u)$  pour  $u = 1.3$

I.1 La fonction  $\varphi_u$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit d'établir la continuité en  $\pi$  pour en déduire, par  $2\pi$ -périodicité, la continuité de  $\varphi_u$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $t \in [\pi, 3\pi[$ , on a  $\varphi_u(t) = \varphi_u(t - 2\pi) = \cos u(t - 2\pi)$  et  $\lim_{t \rightarrow \pi+} \varphi_u(t) = \cos u\pi$  qui est égal à  $\lim_{t \rightarrow \pi-} \varphi_u(t)$ . cqfd

La continuité en  $\pi$  permet d'écrire  $\varphi_u(t) = \cos ut$  pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ .

Etablissons maintenant la parité de  $\varphi_u$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $t \in [(2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi[$ . On a donc  $\varphi_u(t) = \varphi_u(t - 2n\pi)$ .

$\varphi_u$  est clairement paire sur  $[\pi, \pi]$  donc  $\varphi_u(t - 2n\pi) = \varphi_u(2n\pi - t)$ .

Enfin  $\varphi_u(-t + 2n\pi) = \varphi_u(-t)$  car  $-t \in ](-2n - 1)\pi, (-2n + 1)\pi]$ . cqfd

Il en résulte que

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ut \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u - n)t + \cos(u + n)t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(u - n)t}{u - n} + \frac{\sin(u + n)t}{u + n} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n 2u \sin u\pi}{\pi(u^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi_u$  est de classe  $C^1$  par morceaux et continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sa série de Fourier converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $\varphi_u$ . Comme  $\varphi_u$  est paire, on a  $b_n(u) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_u(t) = \frac{\sin u\pi}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2u \sin u\pi}{\pi(u^2 - n^2)} \cos nt.$$

I.2 Pour  $t = \pi$  le calcul de la somme de la série de Fourier de  $\varphi_u$  donne, après division par  $\sin \pi u \neq 0$  :

$$\forall u \in ]0, 1[, \quad \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2},$$

d'où l'égalité demandée.

I.3 On considère la série de fonctions de terme général  $u_n(x) = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1[$ , on a  $u_n(x)$  défini, négatif et équivalent à  $-\frac{x^2}{n^2}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , ainsi la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, 1[$ .

La fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  avec  $u'_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$ .

Pour tout  $x \in [0, a]$  avec  $[0, a] \subset [0, 1[$ , on a  $|u'_n(x)| \leq \frac{2a}{n^2 - a^2}$  qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement sur tout segment  $[0, a]$ .

Il en résulte, d'après le théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$  et que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \stackrel{I.2}{=} \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$

Ainsi pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \int_0^x \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} du + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)}_{=0} = \left[ \ln \frac{\sin \pi u}{u} \right]_0^x = \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \ln \pi = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

I.4 Soit  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \quad s_n(x) = \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Pour tout  $n \geq |x|$ , on a  $|s_n(x)| \leq |s_{n-1}(x)|$  et  $s_n(x)$  de même signe que  $s_{n-1}(x)$ .

La suite  $(|s_n(x)|)_{n \geq |x|}$  est décroissante et positive, donc convergente.

Comme la suite  $(s_n(x))_{n \geq |x|}$  est de signe constant, elle est donc égale, au signe près, à la suite convergente  $(|s_n(x)|)_{n \geq |x|}$ .

Ainsi, la suite de fonctions  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $s$ .

I.4.2 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$  avec  $n \neq x$  (*non précisé dans l'énoncé*).

Par définition, on a  $s_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right) = \frac{1}{n!^2} \prod_{k=1}^n (k-x) \prod_{k=0}^n (k+x)$ . Il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$\begin{aligned} s_n(x+1) &= \frac{1}{n!^2} \prod_{k=1}^n (k-x-1) \prod_{k=0}^n (k+x+1) = \frac{1}{n!^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k-x) \prod_{k=1}^{n+1} (k+x) \\ &= \frac{1}{n!^2} \frac{-x}{n-x} \prod_{k=1}^n (k-x) \times (n+1+x) \prod_{k=1}^n (k+x) = -\frac{n+1+x}{n-x} s_n(x), \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, l'égalité  $s_n(x+1) = \frac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$  est valable pour tout  $n > |x|$ .

Le passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donne  $s(x+1) = -s(x)$ .

I.4.3 La fonction  $s$  est nulle en 0, car  $s_n(0) = 0$  pour tout  $n$ .

Pour  $x \in ]0, 1[$ , on a  $s_n(x) > 0$  et  $\ln s_n(x) = \ln x + \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , ainsi, d'après I.3,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln s_n(x) = \ln x + \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

La fonction exponentielle est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = e^{\ln \frac{\sin \pi x}{\pi}}$ , soit  $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n = \lfloor x \rfloor$  sa partie entière. On a donc  $s(x) = (-1)^n s(x-n)$  et  $x-n \in [0, 1[$ , ainsi  $s(x) = (-1)^n \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi}$ .

On obtient donc  $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Dans la littérature, ce résultat est appelé "développement eulérien de sinus".

## PARTIE II

On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1) \dots (x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \geq p+1$ , on a  $f_n(-p) = 0$ , ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(-p) = 0$ .

II.1.2 On suppose que  $x \notin \mathbb{Z}^-$ . On a donc  $f_n(x) \neq 0$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $n > -x$ , on a  $f_{n+1}(x)$  de même signe que  $f_n(x)$ .

En posant  $N_x = \max\{1, -\lfloor x \rfloor\}$ , on obtient donc  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 0$  pour tout  $n \geq N_x$ .

Le calcul donne  $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)$  et

$$\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = -x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général  $\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ , définie à partir du rang  $N_x$  est convergente.

Pour tout  $n \geq N_x$ , un télescopage des termes donne  $\sum_{k=N_x}^n \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)}$  ce

qui implique  $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x) e^{S_n(x)}$  où  $S_n(x) = \sum_{k=N_x}^n \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$  est le terme général

d'une suite convergente (vers  $S(x)$ ).

Il en résulte que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0$ .

On note  $f$  la fonction  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ , définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

II.2 Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient, après calculs,  $f_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$ .

Le passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donne alors  $f(x) = x f(x+1)$ .

On a  $f_n(1) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $f(1) = 1$ . Avec la relation  $f(x) = x f(x+1)$ , on établit, par récurrence sur  $n$ , que  $f(n) = \frac{1}{(n-1)!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

II.3 Si  $x \in \mathbb{Z}$ , l'un des entiers  $x$  ou  $1-x$  est négatif ou nul donc  $f(x)f(1-x) = 0 = \frac{\sin \pi x}{\pi}$ .

Si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , alors  $s_n(x) \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et, après calculs, on obtient

$\frac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)} = \frac{n}{n+x}$ . Le passage à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donne alors l'égalité demandée  $f(x)f(1-x) = s(x)$ , appelée "formule des compléments" dans la littérature.

II.4 On se propose d'établir que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a la relation :

$$(1) \quad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

*Nota : comme la relation (1) est trivialement vérifiée pour  $p = 1$ , on supposera désormais  $p \geq 2$ , ce qui rendra cohérent le produit écrit dans II.4.4*

II.4.1 On suppose  $px = -n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $f(px) = 0$  d'après II.1.1.

Une division euclidienne donne  $n = pq + r$  avec  $(q, r) \in \mathbb{N}^2$  et  $r \in [0, p[$ . Pour  $k = r$ , on a  $x + \frac{k}{p} = -q$ , ainsi  $f\left(x + \frac{k}{p}\right) = 0$  d'après II.1.1, ce qui annule la partie droite de (1).

La relation (1) est donc vérifiée lorsque  $px \in \mathbb{Z}^-$ .

II.4.2 On suppose que  $px$  n'est pas entier négatif, et soit  $n$  un élément quelconque de  $\mathbb{N}^*$ . On a

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1} n^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{j=0}^{pn-1} (px + j).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1} \left( \frac{n^{-(x+\frac{k}{p})}}{(n-1)!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{p} + i\right) \right) \\ &= \frac{n^{-\left(px + \frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1} \left( \prod_{i=0}^{n-1} (px + k + ip) \right). \end{aligned}$$

Pour chaque  $i \in [0, n[$  et  $k$  variant dans  $[0, p[$ , les entiers  $ip + k$  décrivent l'ensemble  $[ip, (i+1)p[$ . La réunion donne l'ensemble  $[0, np[$ , ainsi

$$\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right) = \frac{n^{-(px+\frac{p-1}{2})} p^{-pn}}{[(n-1)!]^p} \prod_{j=0}^{pn-1} (px + j).$$

Il en résulte que  $\frac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right)}$  est égal à  $p^{pn-1} n^{\frac{p-1}{2}} \frac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!}$  qui est strictement

positif et ne dépend pas de  $x$ .

Le terme de gauche admet une limite égale à  $\frac{p^{px-1} f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right)}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Il en résulte que le terme de droite admet une limite, positive ou nulle et qui ne dépend que de  $p$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On la note  $A_p$ . On obtient alors l'égalité demandée

$$f(px) = A_p p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.3 Pour  $x = \frac{1}{p}$  la relation ci-dessus, donne  $f(1) = A_p \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{1+k}{p}\right)$ .

Sachant que  $f(1) = 1$ , un décalage d'indices  $k+1 \rightarrow k$  donne  $A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = 1$ .

Le changement de parcours des indices  $k \rightarrow p - k$  donne l'autre égalité :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Avec le produit de deux et le résultat II.3, on obtient  $A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} \frac{\sin \frac{k\pi}{p}}{\pi} = 1$  ainsi

$$A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}}.$$

II.4.4 On a  $(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1) = x^p - 1$ , ainsi le polynôme

$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  a pour zéros complexes, les  $p - 1$  racines de l'unité  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$  avec  $k = 1, \dots, p - 1$ .

Le polynôme  $x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1$  a pour zéros complexes, les 2 racines de l'unité

$e^{\frac{2ik\pi}{p}} = z_k$  et  $e^{-\frac{2ik\pi}{p}} = \overline{z_k} = z_{p-k}$ . Ainsi le polynôme  $\prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1\right)$ , de

degré  $2p - 2$ , a pour ensemble de zéros  $\{z_k, z_{p-k}/k = 1, \dots, p - 1\}$ .

Il coïncide avec l'ensemble des zéros de  $(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2$  de même degré et même coefficient dominant, ainsi

$$(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1\right).$$

En donnant à  $x$  la valeur 1, on obtient

$$p^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \underbrace{2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{p}}_{4 \sin^2 \frac{k\pi}{p}} = 4^{p-1} \left( \prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} \right)^2.$$

Il en résulte, connaissant le signe, que  $\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}$ .

Avec le dernier résultat de II.4.3, sachant que  $A_p \geq 0$ , il vient  $A_p = \frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$ .

Combiné avec la relation établie en II.4.2, on obtient l'égalité (1) demandée, appelée "formule multiplicative de Gauss" dans la littérature.

### **PARTIE III**

Soit  $\Gamma$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

III.1 Pour  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $h_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est continue et positive sur  $]0, +\infty[$ .

On a  $h_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ , ainsi  $h_x$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $x > 0$ .

On a  $h_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , ainsi  $h_x$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  pour tout  $x$ .

Il en résulte que la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $\mathcal{D} = ]0, +\infty[$ .

La fonction  $h : (x, t) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est continue sur  $]0, +\infty[^2$ , ainsi que chacune de ses

dérivées partielles  $\frac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x, t) \mapsto \ln^k t e^{-t} t^{x-1}$ .

Pout tout segment  $[a, b] \subset \mathcal{D}$  et tout  $(x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ , on a

$$|h(x, t)| \leq \phi_{[a, b]}(t) \text{ et } \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \ln^k t \phi_{[a, b]}(t) \text{ où } \phi_{[a, b]}(t) = e^{-t} \max\{t^{a-1}, t^{b-1}\}.$$

Comme les fonctions  $\phi_{[a, b]}$  et  $\ln^k t \phi_{[a, b]}$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ , il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que  $\Gamma$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathcal{D}$ .

III.2 Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ .

III.2.1 Soit  $g_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ .

Une intégration par parties, valide, donne pour  $n \geq 1$  :

$$g_n(x) = \underbrace{\left[ (1-u)^n \frac{u^x}{x} \right]_0^1}_0 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du = \frac{n}{x} g_{n-1}(x+1).$$

Il en résulte que  $g_n(x) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{x(x+1) \dots (x+k-1)} g_{n-k}(x+k)$  pour tout  $k \in [1, n]$ .

Après calculs, on obtient  $g_0(x) = \frac{1}{x}$  et  $g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le changement de variable  $t = nu$  donne  $g_n(x) = n^{-x} G_n(x)$ .

En remplaçant par la valeur de  $f_n(x)$ , non nulle, on obtient  $G_n(x) = \frac{n}{(n+x)f_n(x)}$ .

III.2.2 On vérifie aisément (étude directe ou convexité) que  $e^x \geq 1+x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On en déduit que  $e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \geq 0$  et  $e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \geq 0$  pour tout  $t \in [0, n]$ .

En élevant à la puissance  $n$ , on obtient les inégalités demandées :  $e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$  et  $e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ .

On en déduit que, pour tout  $t \in [0, n]$ ,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left[1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

III.2.3 Soit  $a \in [0, 1]$ . L'inégalité  $(1-a)^n \geq 1-na$  est vérifiée pour  $n = 1$ .

Supposons-la vérifiée pour  $n \geq 1$ , alors

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n \geq (1-a)(1-na) = 1 - (n+1)a + na^2 \geq 1 - (n+1)a.$$

Il en résulte, par récurrence sur  $n$ , que l'on a  $(1-a)^n \geq 1-na$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En combinant avec le dernier résultat de III.2.2, on obtient

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - n \frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Pour  $x \in ]0, +\infty[$ , on a

$$0 \leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt = \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt.$$

L'existence de  $\Gamma(x)$  implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = 0$ .

Par ailleurs,  $\int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$  qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$ .

D'après III.2.1, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{f(x)}$ , ainsi  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$ .

Cette expression de  $\Gamma(x)$  est appelée “forme limite d'Euler” dans la littérature.

III.3 D'après III.1 et III.2.4, on a  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Avec la relation  $f(x) = xf(x+1)$ , on établit, par récurrence sur  $n$ , la classe  $C^\infty$  de  $f$  sur  $] -n, +\infty[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il en résulte que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .