

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant; donc la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge; si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2. Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t}$; donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1[$.

- La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0, 1[$;
- la fonction g et les fonctions g_n , $n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux);
- *condition de domination* : $\forall t \in [0, 1[$, $|g_n(t)| = \left| \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \right| = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(t)$; la fonction ϕ est indépendante de n , continue (même sur $[0, 1]$) et intégrable sur $[0, 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\int_0^1 g$.

Or, $\int_0^1 g_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; donc $F(1) = \int_0^1 g = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 = \ln 2$.

3. $\forall n \geq 1, \forall x \geq 2, \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que, pour $n = 1$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1.$$

4. Dérivabilité de F

- (a) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $h'_x(t) = \frac{t^{x-1}(1-x \ln t)}{t^{2x}}$. Donc h'_x est négative sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ et positive sur $]0, e^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et croissante sur $]0, e^{1/x}]$.

On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$.

- (b) $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

Soit $a > 0$. On pose $N_a = E(e^{1/a}) + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant; donc la série alternée $\sum_{n \geq N_a} f'_n(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n , $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup_{x \geq a} |\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

5. Lien avec ζ

Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x} \zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x)$.

Comme $2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. Étude de la convergence

(a) Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc la série produit de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right)^2 = (F(x))^2$.

(b) Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1) \frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

7. Cas où $x = 1$

(a) $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \\ &= 2(-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2} \frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

(b) *Monotonie*

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n} \left(H_n - \frac{1}{n} \right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(c) "Classiquement", $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum_{n \geq 2} c_n(1)$ converge.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8. Développement asymptotique en 1

(a) On pose $h = x - 1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$F(x) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + hF'(1) + o(h).$$

On a aussi : $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-h \ln 2} = h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)$ au voisinage de $x = 1$.

(b) Développement de ζ

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h \ln 2} \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2} h + o(h)} \\ &= \frac{1}{h \ln 2} (\ln 2 + hF'(1) + o(h)) \left(1 + \frac{\ln 2}{2} h + o(h) \right) = \frac{1}{h \ln 2} \left(\ln 2 + h \left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2} \right) + o(h) \right) \\ &= \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1) \end{aligned}$$

9. Développement asymptotique en 1 (bis)

(a) Pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc

$$1. \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq 1. \frac{1}{n^x}. \text{ On en déduit que : } 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Pour $x \in [1, 2]$, la suite $\left(\frac{1}{n^x} \right)_{n \geq 1}$ converge (vers 0) ; comme $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) \text{ converge. De l'encadrement du (a), on déduit la convergence de la série } \sum_{n \geq 1} v_n(x).$$

(c) Pour $x \in]1, 2]$, $\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

(d) La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge simplement sur $[1, 2]$. On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la

$$\text{série. D'après (a), } 0 \leq R_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}. \text{ Donc}$$

$$\sup_{x \in [1, 2]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Donc la série } \sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge uniformément sur } [1, 2].$$

(e) Pour $x \in]1, 2]$, $v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right)$; $v_n(1) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.

v_n est continue, sauf peut-être en 1.

En 1 : en posant $h = x - 1$, $\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et

$$\frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right) = \frac{1}{h} (e^{-h \ln n} - e^{-h \ln(n+1)}) = \frac{1}{h} \left((1 - h \ln n + o(h)) - (1 - h \ln(n+1) + o(h)) \right) = \ln(n+1) - \ln n + o(1) ; \text{ donc } v_n(x) = \frac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1). \text{ Donc } v_n \text{ est continue en 1.}$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1, 2]$. La convergence uniforme sur $[1, 2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1, 2]$.

On en déduit que $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) \right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ . D'où

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1) \text{ au voisinage de } 1^+.$$

10. Application

Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de 8.(b) et

$$9.(e) \text{ les égalités } a = 1 \text{ et } \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = b = \gamma. \text{ D'où } F'(1) = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right).$$

D'après I.4.(b), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2 \left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma \right).$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

11. $B'_1 = 1, B_0 = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + k$. Alors $0 = \int_0^1 (t + k) dt = \frac{1}{2} + k$. Donc $k = -\frac{1}{2}$ et $B_1 = X - \frac{1}{2}$.

$B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = X^2 - X + \ell$. Alors $0 = \int_0^1 (t^2 - t + \ell) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ell$. Donc $\ell = \frac{1}{6}$ et $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

12. Pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t) dt = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$ (car $n - 1 \geq 1$).

13. Symétrie

On note $A_n = (-1)^n B_n(1 - X)$. On va montrer que (A_n) est une suite de polynômes de Bernoulli. L'unicité admise d'une telle suite donnera le résultat attendu.

- Les A_n sont des polynômes réels ;
- $A_0 = B_0 = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, A'_n = (-1)^n (-1) B'_n(1 - X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1 - X) = n A_{n-1}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 A_n(t) dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1 - t) dt \stackrel{u=1-t}{=} (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du = 0$.

14. Développement en série de Fourier

Soit k un entier naturel. La restriction de g_k à $[0, 2\pi[$ est continue. Comme $B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ (même pour $k = 0$) et que B_{2k} est continue, $g_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2\pi^-} B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(2\pi)$. On en déduit que g_k est continue en 2π et, par périodicité, sur $\mathbb{R}$.

De plus, la restriction de g_k à $[0, 2\pi]$ est l'application de classe $\mathcal{C}^1 : x \mapsto B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, donc g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

D'après le théorème de convergence normale, la série de Fourier de g_k converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est g_k . Il reste à montrer que la fonction g_k est paire pour obtenir l'existence d'une suite de réels $(a_n(k))_{n \geq 0}$

telle que, pour tout réel x , on ait : $g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) \cos(nx)$.

$\forall x \in [0, \pi], g_k(-x) = g_k(2\pi - x) \stackrel{2\pi - x \in [0, 2\pi]}{=} B_{2k}\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \stackrel{13.}{=} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \stackrel{x \in [0, 2\pi]}{=} g_k(x)$. Par périodicité, la fonction g_k est paire.

L'unicité est hors de portée d'un taupin.

15. Expression des coefficients

(a) Relation de récurrence

$$\begin{aligned} \pi a_n(k) &= \int_0^{2\pi} g_k(x) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx \\ &\stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \left[B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{B'_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = -\frac{k}{n\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \sin(nx) dx \\ &\stackrel{\text{I.P.P.}}{=} \frac{k}{n\pi} \left[B_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{k}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B'_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{k}{n^2\pi} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{k(2k-1)}{2n^2\pi^2} \int_0^{2\pi} B_{2k-2}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{k}{n^2\pi} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} \cdot \pi a_n(k-1) \end{aligned}$$

(b) $a_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$ car $n \geq 1$.

Donc $a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2} (B_1(1) - B_1(0)) - \frac{2}{(2n\pi)^2} \cdot \pi a_n(0) = \frac{1}{(n\pi)^2}$.

(c) Pour $k \geq 2$, la formule du (a) devient $a_n(k) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1)$. Donc

$$\begin{aligned} a_n(k) &= \left(-\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2}\right) \cdot \left(-\frac{(2k-2)(2k-3)}{(2n\pi)^2}\right) \cdots \left(-\frac{(4)(3)}{(2n\pi)^2}\right) a_n(1) = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2(2n\pi)^{2(k-1)}(n\pi)^2} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}. \end{aligned}$$

16. Conclusion

En appliquant l'égalité de la question 14. pour $x = 0$, on obtient

$$b_{2k} = g_k(0) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} = \frac{a_0(k)}{2} + (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}} \zeta(2k).$$

$$\text{Or } a_0(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_k(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) dx = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) dt = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

$$\text{Finalement } b_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}} \zeta(2k).$$

17. Calcul effectif des b_n

(a) Par récurrence, on vérifie que B_n est de degré n .

$$\text{D'après la formule de Taylor pour les polynômes, } B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

$$\text{Par récurrence, pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, B_n^{(k)} = n(n-1) \cdots (n-k+1) B_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}.$$

$$\text{Donc } B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{n! B_{n-k}(0)}{(n-k)! k!} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

$$(b) \text{ Pour } n \geq 2, b_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}, \text{ donc } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

$$\text{On en déduit : } b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k.$$

$$\text{Finalement, pour tout } n \geq 1 : b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

PROGRAMME MAPLE DE CALCUL DU COEFFICIENT b_p :

```
bernoulli := proc(p)
local bern,n,binome;
if p=0 then 1
else
    binome := [1,1,seq(0,i=1..p)];
    bern[0] := 1;
    for n from 1 to p do
        for i from n+1 downto 1 do binome[i] := binome[i-1]+binome[i] od;
        bern[n] := -sum(binome[i]*bern[i],i=0..n-1)/(n+1);
    od;
fi;
bern(p);
end;
```

La variable `bern` représente une liste indexée de 0 à p contenant les nombres de Bernoulli et `binome` une liste indexée de 0 à $p+1$ contenant, au début de l'étape n , les coefficients du binôme $\binom{n-2}{k}$. De telles listes n'existent pas : il conviendrait de décaler les indices d'une unité pour tester le programme.

Fin du corrigé