

1. (a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = 8$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a ${}^t A + \bar{A} = \begin{pmatrix} a + \bar{a} & c + \bar{b} \\ b + \bar{c} & d + \bar{d} \end{pmatrix}$, donc :

$A \in \mathcal{L}$ si et seulement si $a + \bar{a} = d + \bar{d} = b + \bar{c} = a + d = 0$ ce qui est équivalent $a \in i\mathbb{R}$, $d \in i\mathbb{R}$, $b = -\bar{c}$ et $d = -a$, donc $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & -a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda i & -\overline{\alpha + i\beta} \\ \alpha + i\beta & -\lambda i \end{pmatrix} / (\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda i & -\overline{\alpha + i\beta} \\ \alpha + i\beta & -\lambda i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{L} = \text{Vect} \{E, F, G\}$. On vérifie que cette famille est libre, donc \mathcal{L} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

- (b) $[E, F] = -2G =, [F, G] = -2E$ et $[G, E] = -2F$.

2. (a) Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$, puis à l'aide d'une récurrence on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$\|A^k\| \leq \|A\|^k$. D'autre part la série $\sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ est convergente (d'après d'Alembert),

donc $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente donc convergente (puis on est en dimension finie).

- (b) Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$. L'application $f : M \mapsto P^{-1}MP$ est linéaire en dimension finie, donc

continue et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \exp(A)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(S_n) = f(\exp(A))$. $f(S_n) = \sum_{k=0}^n \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} =$

$$\sum_{k=0}^n \frac{P^{-1}A^kP}{k!} = P^{-1}S_nP$$

Donc $\exp(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{-1}A^kP}{k!} = P^{-1}\exp(A)P$.

- (c) On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$, alors

$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix}$ avec $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. A l'aide d'une récurrence sur k , on a

$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & c_{12}^{(k)} & \cdots & c_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$ avec $c_{ii}^{(k)} = a_{ii}^k = \lambda_i^k$. Ainsi $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

- (d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A est scindé, donc A est trigonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire telle que $A = P^{-1}TP$, $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

D'après ce qui précède, on a

$$\det(\exp(A)) = \det(P^{-1} \exp(T) P) = \det(\exp(T)) = e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \exp(\text{Tr}(T)) = \exp(\text{Tr}(A))$$

Deuxième partie

3. $U(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid {}^t A \bar{A} = I_n\}$. L'application $\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$, $A \mapsto {}^t A \bar{A}$ est un morphisme de groupes

donc $U(2, \mathbb{C}) = \text{Ker}(\Phi)$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

De même $\phi : (U(2, \mathbb{C}), \times) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$, $A \mapsto \det(A)$ est un morphisme de groupes, donc $SU(2, \mathbb{C}) = \det^{-1}(1)$ est un sous-groupe de $U(2, \mathbb{C})$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Alors $A \in SL(2, \mathbb{C}) \Leftrightarrow ad - bc = 1$ et ${}^t A \bar{A} = I_2 \Leftrightarrow ad - bc = 1$ et ${}^t A = \bar{A}^{-1}$

Ce qui est équivalent à $ad - bc = 1$ et $\begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Ce qui est équivalent aussi à $d = \bar{a}$, $c = -\bar{b}$ et $ad - bc = 1$ ou encore $d = \bar{a}$, $c = -\bar{b}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$

5. (a) On a $MX = \lambda X$, donc $\overline{MX} = \overline{\lambda X}$, donc ${}^t(MX) \overline{MX} = (\lambda X) (\overline{\lambda X}) = |\lambda|^2 \|X\|^2$
 D'autre part ${}^t(MX) \overline{MX} = {}^t X ({}^t M \overline{M}) \bar{X} = {}^t X \underbrace{({}^t M \overline{M})}_{=I_2} \bar{X} = \|X\|^2$, donc $|\lambda|^2 = 1$ (puisque $X \neq 0$)

- (b) $\lambda \neq 0$, on a $X = \frac{1}{\lambda} MX$, donc ${}^t X \overline{MY} = \frac{1}{\lambda} ({}^t X {}^t M) (\overline{MY}) = \frac{1}{\lambda} {}^t X ({}^t M \overline{M}) \bar{Y} = \frac{1}{\lambda} {}^t X \bar{Y} = 0$

6. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2, \mathbb{C})$, A admet deux valeurs propres dans \mathbb{C} , λ et μ . $A \in SU(2, \mathbb{C})$, alors $|\lambda| = |\mu| = 1$

Posons $\lambda = e^{i\theta}$, on a $\det(A) = 1$, donc $\mu = \frac{1}{\lambda} = e^{-i\theta}$ (*).

Soit V_1 un vecteur unitaire tel que $AV_1 = e^{i\theta}V_1$ et V_2 un vecteur unitaire orthogonal à V_1 .

On a ${}^t \bar{V}_1 V_2 = 0$ donc ${}^t \bar{V}_1 A V_2 = 0$, ce qui donne que AV_2 est orthogonal à V_1 , donc proportionnel à V_2

Ainsi V_2 est un vecteur propre de A , donc $AV_2 = e^{-i\theta}V_2$.

Notons P la matrice de vecteurs colonnes V_1 et V_2 , alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

D'autre part (V_1, V_2) est orthonormale, donc $P \in SU(2, \mathbb{C})$.

- (b) (ii) \implies (i) est évident.

Supposons que $\text{Tr}(R) = \text{Tr}(S)$, il existe $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$ et $P, Q \in SL(2, \mathbb{C})$ tel que :

$$R = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P \text{ et } S = Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta'} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta'} \end{pmatrix} Q$$

On a $Tr(R) = Tr(S)$ donc $\cos(\theta) = \cos(\theta')$, ce qui donne que $\theta = \theta'$ ou $\theta = -\theta'$

Si $\theta = \theta'$ alors $PRP^{-1} = QSQ^{-1}$ donc $R = (PQ)S(PQ)^{-1}$ et $PQ \in SL(2, \mathbb{C})$

Si $\theta = -\theta'$, notons Q_1 la matrice obtenue par permutation des vecteurs colonnes de Q

Alors $QSQ^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ et $Q_1SQ_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ par suite $R = (PQ_1)S(PQ_1)^{-1}$

$PQ_1 \in SL(2, \mathbb{C})$

7. (a) On a $[A, B] = 0$ donc $AB = BA$, on peut appliquer la formule de Leibniz

$$\text{Posons } H_n = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \left(\sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{A^j B^k}{j! k!}$$

$$\sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \sum_{p=0}^{2n} \left(\sum_{j+k=p} \frac{A^j B^k}{j! k!} \right) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \sum_{p=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^p \frac{A^j B^{p-j}}{j! (p-j)!} \right)$$

$$+ \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \sum_{p=0}^{2n} \frac{1}{p!} \left(\sum_{j=0}^p C_p^j A^j B^{p-j} \right) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \sum_{p=0}^{2n} \frac{1}{p!} (A+B)^p = - \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p!} (A+B)^p$$

$$\text{Donc } \| \| H_n \| \| \leq \left\| \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \left(\sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) \right\| \leq \sum_{p=n}^{2n} \frac{\| \| A+B \| \|^p}{p!} \leq \sum_{p=n}^{2n} \frac{(\| \| A \| \| + \| \| B \| \|)^p}{p!}$$

Comme la série $\sum_{p \geq 0} \frac{(\| \| A \| \| + \| \| B \| \|)^p}{p!}$ est convergente, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^{2n} \frac{(\| \| A \| \| + \| \| B \| \|)^p}{p!} = 0$

$$\text{On a } H_n = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!} (A+B)^\ell - \left(\sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \right) \text{ converge vers } \exp(A+B) - \exp(A) \exp(B)$$

D'après l'unicité de la limite, on a : $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{L}$, alors ${}^t A$ et \bar{A} commutent, donc $\exp({}^t A) \times \exp(\bar{A}) = \exp({}^t A + \bar{A}) = \exp(0) = I_n$, d'autre part t

Les applications $X \mapsto \bar{X}$ et $X \mapsto {}^t X$ sont \mathbb{R} -linéaires en dimension finie, donc $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$ et $\exp({}^t A) = {}^t(\exp(A))$ (même chose que dans la question 2.(b)).

Donc ${}^t(\exp(A)) \times \overline{\exp(A)} = I_n$

D'autre part $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A)) = \exp(0) = 1$, donc $\exp(A) \in SL(2, \mathbb{C})$.

(c) Soit $A \in SU(2, \mathbb{C})$, il existe $P \in SU(2, \mathbb{C})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $A = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$

Posons $B = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$ on a $\exp(B) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, donc $A = \exp(P^{-1}BP)$

Reste à vérifier que $P^{-1}BP \in \mathcal{L}$, on a : $Tr(P^{-1}BP) = Tr(B) = 0$

Et ${}^t(P^{-1}BP) + \overline{P^{-1}BP} = {}^t P {}^t B {}^t P^{-1} + \overline{P^{-1}BP} = {}^t P {}^t B {}^t P^{-1} + {}^t P \bar{B} {}^t P^{-1} = {}^t P ({}^t B + \bar{B}) {}^t P^{-1} = 0$

(d) Supposons que \exp est injective, donc bijective. Comme \exp est continue et $SU(2, \mathbb{C})$ est compact, donc

\mathcal{L} est aussi compact ce qui est absurde. (Un espace vectoriel non nul n'est jamais bornée).

8. Soit $A \in G \setminus \{I_2, -I_2\}$, alors il existe $P \in SL(2, \mathbb{C})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $A = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P$

(a) $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, donc $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. $P \in SL(2, \mathbb{C})$ donc $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = PAP^{-1} \in G$,

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ avec } |a|^2 + |b|^2 = 1, \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} = \overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$$

$$M_\theta = A \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 e^{-i2\theta} & ab(1 - e^{i2\theta}) \\ \overline{ab}(1 - e^{-i2\theta}) & |a|^2 + |b|^2 e^{i2\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + (1 - |a|^2) e^{-i2\theta} & ab(1 - e^{i2\theta}) \\ \overline{ab}(1 - e^{-i2\theta}) & |a|^2 + (1 - |a|^2) e^{i2\theta} \end{pmatrix}$$

(c) Avec les notations de la question précédente :

$$Tr(M_\theta) = 2|a|^2 + (1 - |a|^2) \cos(2\theta) = 2 \cos(2\theta) + 2|a|^2(1 - \cos(2\theta))$$

En posant $t = |a|^2$ lorsque la matrice A décrit $SU(2, \mathbb{C})$, t décrit $[0, 1]$ ($|a|^2 + |b|^2 = 1$).

Etudions les variations de $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 2 \cos(2\theta) + 2t(1 - \cos(2\theta))$

On a $\phi'(t) = 2(1 - \cos(2\theta)) > 0$ (car $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$), donc ϕ est une bijection de $[0, 1]$ sur $[\phi(0), \phi(1)]$

$\phi(0) = 2 \cos(2\theta)$ et $\phi(1) = 2$, donc $[2 \cos(2\theta), 2] \subset \{Tr(g) / g \in G\}$

D'autre part : $2 \cos(2\theta) = 2 - \delta$ avec $\delta = 2 - 2 \cos 2\theta > 0$ (car $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$).

9. Soit $g \in SU(2, \mathbb{C})$, on veut montrer que $g \in G$, l'idée est de montrer qu'il existe $h \in SU(2, \mathbb{C})$ tel que

$Tr(h^{-1}gh) \in [2 - \delta, 2]$ ce qui permettra d'utiliser la question 6.b).

D'après la question 6.(a), il suffit montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = g_\alpha \in G$.

Posons $g_n = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{n}} \end{pmatrix}$, $Tr(g_n) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) \rightarrow 2$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$Tr(g_n) \in [2 - \delta, 2] \subset \{Tr(g) / g \in G\}$$

Par suite il existe $m \in G$ telle que : $Tr(m) = Tr(g_n)$

Et d'après la question 6.(b), il existe $t \in SU(2, \mathbb{C})$ tel que : $g_n = t^{-1}mt$ donc $g_n = t^{-1}mt \in G$

Donc $g = g_n^n \in G$, ce qui donne que $g_\alpha \in G$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

Troisième partie

10. On a $e \circ z - z \circ e = [e, z] = [e, f + ig] = [e, f] + i[e, g] = -2g + 2if = 2iz$

De même $e \circ w - w \circ e = [e, w] = [e, f - ig] = [e, f] - i[e, g] = -2g + 2if = -2iw$

$z \circ w - w \circ z = [z, w] = [f + ig, f - ig] = [f, f] - i[f, g] + i[g, f] + [g, g] = -2i[f, g] = 4ie$

11. $e(v) = \lambda v$, donc $e(z(v)) - v(e(z)) = 2iz(v)$ ce qui donne que $e(z(v)) = (\lambda + 2i)v(z)$.

Supposons qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que : $e(z^k(v)) = \mu_k z^k(v)$

Alors on a $e \circ z = z \circ e + 2iz$ donc

$$e(z^{k+1}(v)) = z \circ e(z^k(v)) + 2iz^{k+1}(v) = z(\mu_k z^k(v)) + 2iz^{k+1}(v) = (\mu_k + 2i)z^{k+1}(v) = \mu_{k+1}z^{k+1}(v)$$

Avec $\mu_{k+1} = \mu_k + 2i$. ce qui donne que $\mu_k = \mu_0 + 2ki$

12. Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z^k(v) \neq 0$, alors, pour tout k , $z^k(v)$ est un vecteur propre de e associé à la valeur propre μ_k , ainsi e admet une infinité de valeurs propres ce qui est absurde (puisque l'on est en dimension finie)

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z^k(v) = 0$. Notons p le plus entier $p \geq 1$ tel que $z^p(v) = 0$ et posons $v_0 = v^{p-1}(v)$

alors v_0 est un vecteur propre de e et $z(v_0) = z^p(v) = 0$.

13. On a $v_k = w^k(v_0)$. $e(v_0) = \lambda_0 v_0$.

On a $e \circ w = w \circ e - 2iw$, donc

$$e(v_1) = e(w(v_0)) = w(e(v_0)) - 2iw(v_0) = \lambda_0 w(v_0) - 2iw(v_0) = (\lambda_0 - 2i)v_1$$

De même

$$e(v_2) = e(w(v_1)) = w(e(v_1)) - 2iw(v_1) = (\lambda_0 - 2i)v_2 - 2iv_2 = (\lambda_0 - 4i)v_2$$

Par récurrence $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k$.

On a $z(v_0) = 0$ et $z \circ w = w \circ z + 4ie$, donc $z(v_1) = z(w(v_0)) = \underbrace{w(z(v_0))}_{=0 \text{ car } z(v_0)=0} + 4ie(v_0) = 4i\lambda_0 v_0$

Aussi on a

$$z(v_2) = z(w(v_1)) = w(z(v_1)) + 4ie(v_1) = 4i\lambda_0 \underbrace{w(v_0)}_{=v_1} + 4i(\lambda_0 - 2i)v_1 = 4i(2\lambda_0 - 2i)v_1$$

Supposons que $z(v_k) = \alpha_k v_{k-1}$, $k \geq 1$ alors

$$z(v_{k+1}) = z(w(v_k)) = w(z(v_k)) + 4ie(v_k) = \alpha_k v_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)v_k = (\alpha_k + 4i(\lambda_0 - 2ik))v_k$$

Donc $\alpha_{k+1} = \alpha_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)$, ce qui donne que $\alpha_{k+1} - \alpha_k = 4i(\lambda_0 - 2ik)$ avec $\alpha_1 = 4i\lambda_0$

Par sommation , on a : $\sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = 4i\lambda_0(p-1) + 4p(p-1)$

Donc $\alpha_p = \alpha_1 + (4i\lambda_0 + 4p)(p-1) = 4i\lambda_0 + (4i\lambda_0 + 4p)(p-1) = 4p(i\lambda_0 + p-1)$

Ainsi :

$$z(v_k) = 4k(i\lambda_0 + k-1)v_{k-1} (*)$$

14. (a) Supposons que , pour tout k , v_k est non nul , on a $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k$,

Alors , pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 - 2ik$ est une valeur propre de e . Ainsi e admet une infinité de valeurs propres , ce qui est absurde .

donc il existe q tel que $v_q = 0$, soit n le plus petit entier $v_{n+1} = 0$, alors v_0, v_1, \dots, v_n sont tous non nuls

(v_0, v_1, \dots, v_n) est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes , donc c'est une famille libre .

(b) On a $v_{n+1} = 0$, donc $z(v_{n+1}) = 0$, la relation (*) , donne $\lambda_0 = in$.

On remplace maintenant : $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k = i(n-2k)v_k$, $z(v_k) = -4k(n+1-k)v_{k-1}$, le reste est immédiat .