CONCOURS COMMUN MINES, PONTS,.. 1977

OPTIONS M ET P' - EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 2 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve commune aux candidats des options M et P' comporte 2 pages

---

N.B. Dans les questions du problème comportant la recherche de résultats numériques, le candidat expliquera la marche suivie pour conduire les calculs, en donnant les justifications nécessaires, et indiquera, s'il y a lieu, le titre et l'auteur des tables de valeurs numériques utilisées.

Soit a un nombre positif donné. On considère la série numérique convergente ayant pour terme général

$$u_n = \frac{1}{(n^2 + a^2)^2} \qquad (n \geq 1)$$

On désigne par S (a) la somme de cette série, et on pose

$$S_n(a) = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n \quad , \quad R_n(a) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

1) Démontrer les inégalités

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)^4} < R_n(a) < \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$$

2) On pose

$$S'_n(a) = S_n(a) + \frac{1}{3(n+1+a)^3}$$

$$S''_n(a) = S_n(a) + \frac{1}{3n^3}$$

On forme les deux différences

$$S(a) - S'_n(a) \quad \text{et} \quad S(a) - S''_n(a) \;;$$

montrer qu'elles ont des signes différents, et que chacune d' elles est majorée, en valeur absolue, par le nombre

$$\Delta_n(a) = \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{3(n+1+a)^3}$$

Quelle est la partie principale de la différence

$$\Delta_n(a) - u_{n+1} \quad ?$$

3) On suppose désormais $a = \frac{1}{2}$, et on désigne, pour abréger, par S la somme $S(\frac{1}{2})$ de la série

$$u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n + \dots\dots$$

où $\quad u_n = \dfrac{1}{(n^2+\frac{1}{4})^2}$.

.../...

Calculer la valeur décimale approchée à 10^{-6} près par défaut de chacun des dix nombres : $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_9, u_{10}$.

A l'aide de ces valeurs, calculer la valeur décimale approchée du nombre S en indiquant quelle en est la précision.

4) Supposant toujours $a = \frac{1}{2}$, on désigne par σ la somme de la série alternée convergente

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots\ldots\ldots$$

et par σ_n la somme des n premiers termes de cette série :

$$\sigma_n = u_1 - u_2 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} u_n$$

Démontrer que σ est, quel que soit n, compris entre σ_n et σ_{n+1}.

A partir des dix valeurs calculées à la 3ème question, calculer une valeur décimale approchée du nombre σ, avec la meilleure approximation jugée possible, et préciser la marge d'incertitude correspondante. Ce calcul permet d'avoir la partie entière et quelques-unes des premières décimales de la représentation décimale de σ ; quelles sont ces décimales ?
