Partie 1

Question 1

$0 \leqslant 2\pi$, donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\,|e_{-n}(\theta)|\,\mathrm{d}\theta$.
Or $|f(\theta)| \leqslant \|f\|$, et $|e_{-n}(\theta)| = 1$, donc $|c_n(f)| \leqslant \|f\|$.
La suite $(|c_n(f)|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc majorée, donc
$\boxed{\text{la suite } (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est bornée}}$.

Question 2

- Soit $f \in \mathscr{C}^\infty_\#$ et $n \in \mathbb{Z}$.
  f est en particulier de classe C^1, de même que $\theta \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$, donc, d'après la formule d'intégration par parties,
  $c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi}\left(\left[\left(f(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + \mathrm{i}n\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\,e_{-n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)$.
  Or f est 2π-périodique, donc le crochet d'intégration par parties est nul, donc $\boxed{c_n(f') = \mathrm{i}n c_n(f)}$.

- On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n\left(f^{(k)}\right) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f)$.
  Par conséquent, d'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(k)}\right\| \geqslant |n|^k |c_n(f)|$, donc :
  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ |c_n(f)| \leqslant \dfrac{\left\|f^{(k)}\right\|}{|n|^k}}$.

Question 3

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|d_n e_n(x)| = |d_n|$.
  Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} d_n$ converge absolument, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} d_n e_n(x)$ est également absolument convergente, donc convergente.
  C'est la même chose pour la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} d_{-n} e_{-n}(x)$.

- D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|d_n e_n\| = |d_n|$. Or e_n est 2π-périodique, donc $\|d_n e_n\|_\infty = |d_n|$.
  Ainsi, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} d_n e_n$ est normalement donc uniformément convergente, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n e_n$ est continue.
  Par conséquent, la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n$ est continue.
  C'est la même chose pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n} e_{-n}$, et $d_0 e_0$ est continue, donc h est continue.
  Enfin, toutes les fonctions e_n, où $n \in \mathbb{Z}$, sont 2π-périodiques, donc h l'est aussi.
  Finalement, $\boxed{h \in \mathscr{C}^0_\#}$.

- Soit $p \in \mathbb{Z}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n e_n e_{-p}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, et $\|d_n e_n e_{-p}\| = |d_n|$, donc la série de fonctions

$\sum_{n\geqslant 1} d_n e_n e_{-p}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,2\pi]$.

Ainsi, par intégration terme à terme d'une série de fonctions uniformément convergente sur un segment, $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{2\pi} d_n e_n e_{-p}$ converge, et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n e_{-p}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} d_n e_n e_{-p}$.

C'est la même chose pour justifier que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n} e_{-n} e_{-p}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} d_{-n} e_{-n} e_{-p}$.

On peut donc conclure que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} d_n e_n e_{-p}$.

Enfin, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_0 = 1$, et, si k est un entier relatif non nul, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi}-1}{2\mathrm{i}k\pi} = 0$, donc :

$\boxed{\text{pour tout } p\in\mathbb{Z},\ c_p(h) = d_p}$.

Question 4

L'hypothèse est inutilement compliquée : on remplace C_k par $\max\left(\{|d_{1-N_k}|,\cdots,|d_{N_k-1}|,C_k\}\right)$, ce qui permet de s'affranchir de N_k. C'est ce que je ferai.

- Soit $\ell\in\mathbb{N}$.

  Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $e_n^{(\ell)} = (\mathrm{i}n)^\ell e_n$, et $\|e_n\|_\infty = 1$, donc $\left\|d_n e_n^{(\ell)}\right\|_\infty = |d_n|\, n^\ell$.

  Or $|d_n| \leqslant \frac{C_{\ell+2}}{n^{\ell+2}}$, donc $\left\|d_n e_n^{(\ell)}\right\|_\infty \leqslant \frac{C_{\ell+2}}{n^2}$.

  Or la suite $\left(\left\|d_n e_n^{(\ell)}\right\|_\infty\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{C_{\ell+2}}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\left\|d_n e_n^{(\ell)}\right\|_\infty$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} d_n e_n^{(\ell)}$ est normalement convergente.

  C'est la même chose pour la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} d_{-n} e_{-n}^{(\ell)}$,

  donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e_n^{(\ell)} \text{ converge normalement}}$ [1] .

- On montre par récurrence que, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n$ est de classe C^ℓ, de dérivée ℓ-ième $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n^{(\ell)}$.

  - D'après la question 3, c'est vrai pour $\ell = 0$.
  - Soit $\ell\in\mathbb{N}$, pour lequel $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n$ est de classe C^ℓ, de dérivée ℓ-ième $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n^{(\ell)}$.

    La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} d_n e_n^{(\ell)}$ est donc simplement convergente.

    Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $d_n e_n^{(\ell)}$ est de classe C^1, de dérivée $d_n e_n^{(\ell+1)}$.

    Enfin, d'après le début de la question, La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} d_n e_n^{(\ell+1)}$ est normalement donc uniformément convergente.

[1] L'énoncé a omis de définir cette notion!

On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n^{(\ell)}$ est C^1, de dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n^{(\ell+1)}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n$ est e $C^{\ell+1}$, de dérivée $\ell+1$-ième $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n^{(\ell+1)}$.

– Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n$ est de classe C^∞, 2π-périodique, donc appartient à $\mathscr{C}_\#^\infty$.

- C'est la même chose pour $\sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n} e_{-n}$, donc $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e_n \text{ appartient à } \mathscr{C}_\#^\infty}$.

Question 5

A noter que la définition de l'énoncé impose à un opérateur différentiel d'être non nul (à cause de l'existence de l'entier K), et que, si l'on n'autorise pas les b_k à être des complexes quelconques, le sens réciproque est faux.

- Soit B un opérateur différentiel, et K son ordre. Il existe donc des complexes $b_0, \cdots, b_K$, avec $b_K \neq 0$, tels que, pour tout $f \in \mathscr{C}_\#^\infty$, $Bf = \sum_{k=0}^{K} b_k f^{(k)}$.

  Alors, d'après la question 2 :

  pour tout $f \in \mathscr{C}_\#^\infty$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(Bf) = \left(\sum_{k=0}^{K} b_k (\mathrm{i}n)^k\right) c_n(f) = P(n)\, c_n(f)$,

  où $P = \sum_{k=0}^{K} \mathrm{i}^k b_k X^k$.

  Comme $b_K \neq 0$, $\mathrm{i}^k b_K \neq 0$, donc le polynôme P est bien de degré K.

- Soit A un endomorphisme de $\mathscr{C}_\#^\infty$ pour lequel existe un polynôme complexe de degré K , $P = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$, de sorte que, pour tout $f \in \mathscr{C}_\#^\infty$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(Af) = P(n)\, c_n(f)$.

  La méthode consiste à construire un opérateur différentiel dont on va montrer qu'il est égal à A.

  On pose, pour tout $k \in [[0, K]]$, $b_k = \dfrac{a_k}{\mathrm{i}^k}$,[2] et on définit B sur $\mathscr{C}_\#^\infty$ par $Bf = \sum_{k=0}^{K} b_k f^{(k)}$. B est donc un opérateur différentiel d'ordre K, et, pour tout $f \in \mathscr{C}_\#^\infty$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

  $c_n(Bf) = \left(\sum_{k=0}^{K} b_k (\mathrm{i}n)^k\right) c_n(f) = P(n)\, c_n(f) = c_n(Af)$.

  Ainsi, si $f \in \mathscr{C}_\#^\infty$, Bf et Af sont deux éléments de $\mathscr{C}_\#^\infty$, donc de $\mathscr{C}_\#^0$, et $(c_n(Bf))_{n\in\mathbb{Z}} = (c_n(Af))_{n\in\mathbb{Z}}$.

  Or, d'après le cours, l'application $g \mapsto (c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective sur $\mathscr{C}_\#^0$, donc $Bf = Af$.

  Finalement, A est un opérateur différentiel d'ordre K de $\mathscr{C}_\#^\infty$.

Partie 2

Question 6

Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|\rho(n)\, c_n(f)| \leqslant |n|^\ell\, |c_n(f)|$.

[2] Voilà pourquoi il faut remplacer "b_k réels" par "b_k complexes"

Mais, avec les notations de la question 2, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{C_{k+\ell}}{|n|^{k+\ell}}$, donc $|\rho(n)\, c_n(f)| \leqslant \dfrac{C_{k+\ell}}{|n|^{k}}$.

On peut donc appliquer la question 4 :

$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho(|n|)\, c_n(f)\, e_n \text{ converge normalement, et sa somme appartient à } \mathscr{C}^{\infty}_{\#}}$.

Question 7

On va à nouveau se servir de la question 4.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $t\rho(|n|) \geqslant t|n|$ donc, par croissance de l'exponentielle et d'après la question 1, $\left|\mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t|n|}\|f\|$.

Mais $t > 0$, donc, d'après les règles de croissances comparées, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n^k \mathrm{e}^{-t|n|}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et quand $n \to -\infty$, donc la suite $\left(|n|^k \mathrm{e}^{-t|n|}\, \|f\|\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

Les conditions d'application du résultat du 4 sont donc réunies, donc :

$\boxed{\forall t > 0, \text{ la série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f)\, e_n \text{ converge normalement, et sa somme appartient à } \mathscr{C}^{\infty}_{\#}}$.

Question 8

Soit a un réel strictement positif.

On va reprendre le schéma de la question 4 pour prouver que la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est de classe C^{∞} sur $[a, +\infty[$.

Pour cela, il suffit de savoir que :

-pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n définie sur $[a, +\infty[$ par$\varphi_n(t) = \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est C^{∞} sur $[a, +\infty[$

-pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n^{(m)}$ converge normalement.

On vérifie :

-l'exponentielle est C^{∞}et est sa propre dérivée, donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n est C^{∞} sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, sa dérivée m-ième est $\varphi_n^{(m)} : t \mapsto (-\rho(|n|))^m \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

-par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left\|\varphi_n^{(m)}\right\|_{\infty} \leqslant |\rho(|n|)|^m \mathrm{e}^{-a\rho(|n|)}\, |c_n(f)| \leqslant |n|^{\ell m} \mathrm{e}^{-a|n|}\, \|f\|$.

Par règle de croissances comparées, $n^{\ell m} \mathrm{e}^{-an} = \left(n^{\ell m} \mathrm{e}^{-\frac{an}{2}}\right) \mathrm{e}^{-\frac{an}{2}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{an}{2}}\right)$.

Or les suites $\left(\mathrm{e}^{-\frac{an}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(n^{\ell m} \mathrm{e}^{-an}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\frac{an}{2}}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\ell m} \mathrm{e}^{-an}$ converge.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left\|\varphi_n^{(m)}\right\|_{\infty}$ converge.

De même, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left\|\varphi_n^{(m)}\right\|_{\infty}$ converge.

Finalement, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n^{(m)}$ converge normalement.

Le même raisonnement qu'à la question 4 permet de conclure que $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est de classe C^{∞} sur $[a, +\infty[$, et que ses dérivées successives se calculent par dérivations terme à terme successives.

Or ceci est vrai pour tout $a > 0$, et tout réel strictement positif est intérieur à une demi-droite $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, donc

$\boxed{t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \text{ est de classe } \mathrm{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[}$.

Question 9

Soit $f \in \mathscr{C}^0_\#$.

On a vu à la question précédente que $t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est C^1 sur $]0,+\infty[$, et que sa dérivée est la fonction $t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\rho(|n|) \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

On a vu à la question 7 que Q_t est effectivement défini sur $\mathscr{C}^0_\#$ et prend ses valeurs dans $\mathscr{C}^\infty_\#$.

Or A est défini sur $\mathscr{C}^\infty_\#$.

On peut donc effectivement écrire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$,

$A(Q_t(f))(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho(|n|) \mathrm{e}^{-t\rho(|n|)} c_n(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

Ainsi, la fonction Φ définie sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ par $\Phi(x,t) = Q_t(f)(x)$ vérifie :

$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) = -A(Q_t(f))(x)}$.

Question 10

Soit u et g deux éléments de $\mathscr{C}^\infty_\#$.

Par définition, $(A + \alpha I) u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\rho(|n|) + \alpha) c_n(u) \mathrm{e}_n$.

Mais on a vu que les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\rho(|n|) c_n(u)|$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u)|$ convergeaient, donc, d'après la question 3, la suite des coefficients de Fourier de $(A + \alpha I) u$ est $((\rho(|n|) + \alpha) c_n(u))_{n\in\mathbb{Z}}$.

- Ainsi, si $(A + \alpha I) u = g$, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\rho(|n|) + \alpha) c_n(u) = c_n(g)$. Or $\rho(|n|) \in \mathbb{R}^+$, et $\alpha \notin \mathbb{R}^-$, donc $\rho(|n|) + \alpha \neq 0$, donc $c_n(u) = \dfrac{c_n(g)}{\rho(|n|) + \alpha}$.

  Mais $u \in \mathscr{C}^\infty_\#$, donc u est la somme de sa série de Fourier, donc $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{c_n(g)}{\rho(|n|) + \alpha} \mathrm{e}_n$.

- Réciproquement, comme $g \in \mathscr{C}^\infty_\#$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $|c_n(g)| \leqslant \dfrac{\|g\|}{|n|^k}$, donc, pour $|n| > |\alpha| + 1$, $\dfrac{|c_n(g)|}{\rho(|n|) + \alpha} \leqslant \dfrac{\|g\|}{(|n| - |\alpha|)|n|^k} \leqslant \dfrac{\|g\|}{|n|^k}$.

  On peut donc appliquer la question 4 : on peut définir $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{c_n(g)}{\rho(|n|) + \alpha} \mathrm{e}_n$, c'est un élément de $\mathscr{C}^\infty_\#$, et, d'après la question 3, la suite de ses coefficients de Fourier est $\left(\dfrac{c_n(g)}{\rho(|n|) + \alpha}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, donc

  $(A + \alpha I) u = t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\rho(|n|) + \alpha) c_n(u) \mathrm{e}_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) \mathrm{e}_n$.

  Enfin, $g \in \mathscr{C}^\infty_\#$, donc g est la somme de sa série de Fourier, donc $(A + \alpha I) u = g$.

Finalement, on a montré que $\boxed{A + \alpha I \text{ est un automorphisme de } \mathscr{C}^\infty_\#}$.

Question 11

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction h_n sur $]0,+\infty[$ par $h_n(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-t\rho(|n|)}c_n(g)\,\mathrm{e}^{inx}$.
C'est une fonction continue sur $]0,+\infty[$, de module majoré par $t \mapsto \mathrm{e}^{(-\mathrm{Re}(\alpha)-|n|)t}\,|c_n(g)|$.
Or $\mathrm{Re}(\alpha) + |n| > 0$, donc $t \mapsto \mathrm{e}^{(-\mathrm{Re}(\alpha)-\rho(|n|))t}\,|c_n(g)|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et son intégrale y vaut $\dfrac{|c_n(g)|}{\mathrm{Re}(\alpha)+\rho(|n|)}$.
Par conséquent, h_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, et, car $|n| \leqslant \rho(|n|)$,
$\displaystyle\int_{]0,+\infty[} |h_n| \leqslant \frac{|c_n(g)|}{\mathrm{Re}(\alpha)+|n|} \leqslant |c_n(g)|$.
En particulier et d'après la question 2, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_{]0,+\infty[} |h_n| \leqslant \frac{|c_n(g)|}{\mathrm{Re}(\alpha)+n} \leqslant \frac{\|g\|}{n^2}$. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_{]0,+\infty[} |h_n|$ converge.

Ainsi, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et son intégrale y vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[} h_n$.

On procède de même avec ,$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_{-n}$.

Finalement, $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}Q_t(g)(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, et son intégrale y vaut
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[} h_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-t\rho(|n|)}c_n(g)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{c_n(g)}{\alpha+\rho(|n|)}\mathrm{e}^{inx}.$$
En reprenant les résultats de la question 10, on peut donc conclure que
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}Q_t(g)(x)\,\mathrm{d}t = (A+\alpha I)^{-1}(x)}.$$

Question 12

- La construction de la question 10 est possible dès lors que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq -\rho(|n|)$.
  Dans tous ces cas, $A + \alpha I$ est un automorphisme de $\mathscr{C}^\infty_\#$, donc est de noyau nul, donc $-\alpha$ n'est pas une valeur propre de A.
- Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$, e_N est non nul, et $(c_n(e_N))_{n\in\mathbb{Z}} = (\delta_{nN})_{n\in\mathbb{Z}}$, donc $Ae_N = \rho(N)\,e_N$.
- Finalement, $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont les nombres } \rho(n), \text{ où } n \in \mathbb{N}}$.

Partie 3

Le lecteur aura noté qu' "occurrence" s'écrit avec deux "r"...

Question 13
Si $f \in \mathscr{C}^\infty_\#$, d'après la question 6, $A^1(f)$ est défini et est élement de $\mathscr{C}^\infty_\#$, donc $(A^1 \circ A^1)(f)$ est défini.
D'autre part, d'après la question 3, la suite des coefficients de Fourier de $A^1(f)$ est $(|n|\,c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$,
donc $(A^1 \circ A^1)(f) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|\,|n|\,c_n(f)\,e_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(f)\,e_n = A_2(f)$.

Question 14

- Avec $P = X^2$, pour tout $f \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n\left(A^2(f)\right) = P(n)\, c_n(f)$, donc, d'après la question 5, A^2 est l'opérateur différentiel $f \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{i}^2} f'' = -f''$.

- Si P est un polynôme pour lequel, pour tout $f \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n\left(A^1(f)\right) = P(n)\, c_n(f)$, on obtient, en appliquant à $f = e_n$, que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) = |n|$.
En particulier, X coïncide avec P en tous les entiers naturels, donc en une infinité de réels, donc $P = X$.
Et $-X$ coïncide avec P en les opposés de tous les entiers naturels, donc en une infinité de réels, donc $P = -X$.
On a obtenu deux résultats contradictoires, donc A^1 n'est pas un opérateur différentiel.

Question 15

- Sur $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$, l'opposé du laplacien est l'opérateur différentiel $f \mapsto -f''$: c'est A^2. Or A^1 est un opérateur de $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$ dont la carré est A^2 : c'est donc bien une racine carrée de l'opposé du laplacien de $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$.

- Si f est un élément de $\mathscr{C}_{\#}^{0}$, et si $t \in]0, +\infty[$, on sait que la fonction $x \mapsto Q_t^2(f)(x)$ est élément de $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$, et que $A^2(Q_t^2(f)) = -\left(Q_t^2(f)\right)''$.
Ainsi, le résultat de la question 9 dit que la fonction Φ définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par $\Phi(x,t) = Q_t(f)(x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$: c'est léquation de la chaleur à une dimension.
Comme on a obtenu cette conclusion en appliquant le résultat de 9 dans un cas particulier, on peut l'interpréter comme donnant des solutions d'un problème différentiel qui généralise l'équation de la chaleur.

Question 16

Le candidat qui a anticipé sur la question 17 sait qu'il doit trouver $\alpha = \dfrac{1}{\pi}$.

- On fixe y dans $\mathbb{R}$, $t \in]0, +\infty[$, et $f \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$.
On a déjà vu que f est la somme de sa série de Fourier, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\dfrac{f(y-x)}{t^2 + x^2} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(y-x)}}{t^2 + x^2}$.
Afin d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme, on définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = \dfrac{c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(y-x)}}{t^2 + x^2}$.

  - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, φ_n est continue, de module majoré par $x \mapsto \dfrac{|c_n(f)|}{t^2 + x^2}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.
  - Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n| \leqslant |c_n(f)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{t^2 + x^2}$.
  Or les deux séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |c_n(f)|$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} |c_{-n}(f)|$ convergent puisque $f \in \mathscr{C}_{\#}^{\infty}$, donc les deux séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n|$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_{-n}|$ convergent.

Le théorème d'intégration terme à terme (toujours en séparant les deux séries) s'applique donc :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\mathrm{e}^{iny} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-inx}}{t^2+x^2}\mathrm{d}x.$

- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on calcule l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-inx}}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$.

  $u \mapsto tu$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}$ vers lui-même et $x \mapsto \dfrac{t\mathrm{e}^{-inx}}{t^2+x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, d'après la formule de changement de variable,
  $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-inx}}{t^2+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-intu}}{t^2+t^2u^2} t^2\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-intu}}{1+u^2}\mathrm{d}u.$
  Enfin, d'après le premier résultat admis, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-intu}}{1+u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-|n|t} = \pi\mathrm{e}^{-|n|t}.$

- On remplace les intégrales dans la formule du premier point :
  $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\mathrm{e}^{iny}\pi\mathrm{e}^{-|n|t}$, donc
  $\boxed{\displaystyle Q_t^1(f)(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x}.$

Partie 4

Question 17

- Préliminaire : si $t \in]0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-tn}$ converge comme série géométrique de raisone^{-t}, qui est élément de $]0,1[$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-t|n|}$ converge. On notera sa somme $S(t)$.

- Soit $f \in \mathscr{C}_{\#}^0$, $t \in]0,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$.
  $Q_t^1(f)(y)$ est défini d'après la question 7.
  f est continue bornée et $x \mapsto \dfrac{t}{t^2+x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \dfrac{t}{t^2+x^2} f(y-x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
  L'intégrale$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x$ est donc définie.

- D'après le second théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f. Les P_k sont en particulier des éléments de $\mathscr{C}_{\#}^{\infty}$, donc on peut leur appliquer la question 16 : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q_t^1(P_k)(y) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} P_k(y-x)\,\mathrm{d}x$.
  On fait tendre k vers $+\infty$:

  - d'après la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(P_k) - c_n(f)| \leqslant \|P_k - f\|$, donc $|Q_t^1(P_k)(y) - Q_t^1(f)(y)| \leqslant S(t)\,\|P_k - f\|$.
    Or, quand $k \to +\infty$, $\|P_k - f\| \to 0$, donc $Q_t^1(P_k)(y) \to Q_t^1(f)(y)$.
  - :
    pour tout $k \in \mathbb{N}$,
    $\displaystyle\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} P_k(y-x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|P_k - f\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\ .$

Comme au-dessus, on en déduit que, quand $k \to +\infty$,
$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} P_k(y-x)\,\mathrm{d}x \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x$.

- On a bien montré que $\boxed{Q_t^1(f)(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,\mathrm{d}x}$.

Question 18

- Soit $t \in \,]0,+\infty[$.
  Pour tout $y \in [0,2\pi]$, $Q_t^1(y) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t|n|} c_n(f)\,\mathrm{e}^{iny}$.
  Chaque fonction $y \mapsto \mathrm{e}^{-t|n|} c_n(f)\,\mathrm{e}^{iny}$ est continue sur $[0,2\pi]$, et l'intégrale sur $[0,2\pi]$ de son module vaut $2\pi\mathrm{e}^{-t|n|}|c_n(f)|$, ce qui est inférieur à $2\pi\mathrm{e}^{-t|n|}\|f\|$.
  On a déjà vu que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-t|n|}$ converge, donc, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-t|n|}$ converge, donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^{2\pi} Q_t^1(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t|n|} c_n(f) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iny}\mathrm{d}y$.
  Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iny}\mathrm{d}y$ vaut 2π si $n=0$ et 0 sinon, donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} Q_t^1(y)\,\mathrm{d}y = 2\pi c_0(f) = \int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{d}y$.

- Le résultat demandé est donc vrai, puisque l'expression $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(f(y) - Q_t^1(y)\right)\mathrm{d}y$ est nulle pour tout $t > 0$!

Question 19

- On effectue le changement de variable $x = tu$, justifié de la même façon qu'au 16.
  Ainsi, pour tout $t > 0$, $Q_t^1(f)(y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y-tu)}{1+u^2}\mathrm{d}u$.
  On va maintenant utiliser les théorèmes de caractérisation séquentielle de la limite et de convergence dominée.

- Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

  - f est continue, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \dfrac{f(y-t_nu)}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(y-t_nu)}{1+u^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{f(y)}{1+u^2}$.
  - f étant bornée, toutes les fonctions $u \mapsto \dfrac{f(y-t_nu)}{1+u^2}$ sont de modules majorés par la même fonction : $u \mapsto \dfrac{\|f\|}{1+u^2}$, qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $Q_{t_n}^1(f)(y) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{1+u^2}\mathrm{d}u$.
  Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi$, donc $Q_{t_n}^1(f)(y) \underset{n\to+\infty}{\to} f(y)$.

- Ce qui précède vaut pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0, donc, par théorème de caractérisation séquentielle de la limite :
  $\boxed{Q_t^1(f)(y) \underset{t \underset{>}{\to} 0}{\to} f(y)}$.

Partie 5

Question 20

- Si t est un réel positif ou nul, $Q_t^1(f)$ est un élément de $\mathscr{C}_{\#}^0$, dont la suite des coefficients de Fourier est $\left(\mathrm{e}^{-t|n|}c_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

  Ainsi, d'après la formule de Parseval, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2t|n|}\left|c_n(f)\right|^2$ converge, et $E(t) = \pi \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t|n|}\left|c_n(f)\right|^2$.

- Chacune des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t|n|}\left|c_n(f)\right|^2$ décroît sur $[0,+\infty[$, donc c'est aussi le cas pour E.

- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on note ψ_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\psi_n(t) = \mathrm{e}^{-2t|n|}\left|c_n(f)\right|^2$.
  ψ_n est bornée, et $\|\psi_n\|_\infty = \left|c_n(f)\right|^2$.
  Or, en appliquant le premier point avec $t=0$, on trouve que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2$ converge.

  Ainsi, la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n$ converge normalement donc uniformément.

  Or, pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, $\psi_n(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Par conséquent, d'après le théorème de la double limite, $\boxed{E(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \left|c_0(f)\right|^2}$.