

Théorème de Rolle dans le cas complexe

A Définition de $A_z P(X)$

1)

A_z est linéaire par linéarité de la dérivation. De plus, si $P \in C_n(X)$ et alors $\deg(z - X)P' \leq \deg P$ donc $\deg(A_z P) \leq \deg P \leq n$

De plus $A_z(X^n) = n(z - X)X^{n-1} + nX^n = nX^n$.

Donc $A_z(C_n(X)) = \text{vect}((A_z(X^i))_{0..n}) \subset C_{n-1}(X)$

2)

Soit $P \in C_n(X)$. On procède comme dans l'énoncé

$$\begin{aligned} A_{z_1}(A_{z_2}P)(X) &= A_{z_1}((z_2 - X)P'(X) + nP(X)) = \\ (z_1 - X)((z_2 - X)P'(X) + nP(X)) + (n-1)((z_2 - X)P'(X) + nP(X)) &= \\ (z_1 - X)(z_2 - X)P''(X) + (n-1)(z_1 + z_2 - 2X)P'(X) + n(n-1)P(X) \end{aligned}$$

puisque l'expression est symétrique en z_1 et z_2

3)

On a, si $k \in [1, n]$ $A_z((X - z)^k) = (n - k)((X - z)^k)$ (1)

et $A_z(1) = n$. la formule (1) est encore valable.

Les éléments $(X - z)^k$ ($k = 0..n$) forment une famille de polynômes non nuls échelonnée sur $(1, \dots, X^n)$, donc une famille libre, donc une base de $C_n(X)$

Donc $A_z(C_n(X)) = \text{vect}((n - k)(X - z)^{n-k})_{k=0..n} = C_{n-1}(X)$

Donc $\text{rg}(A_z) = n$ et $\ker(A_z) = \text{vect}((X - z)^n)$ (puisque $A_z((X - z)^n) = 0$)

4)

si $k \in [1, n]$ $\widehat{A_z}((X - z)^k) = (n - k)((X - z)^k)$

La base $((X - z)^k)_{k=0..n}$ est donc une base de vecteurs propres de $\widehat{A_z}$ et

$\text{sp}(\widehat{A_z}) = [0, n]$

$\widehat{A_z}$ est donc diagonalisable, et les sous espaces

$V(n - k) = \text{Vect}((X - z)^k) \ (k \in \{0, \dots, n\})$ sont les sous-espaces propres (de dimension 1)

5)

Soit E endomorphisme de $C_n(X)$ qui commute avec $\widehat{A_z}$. Les sous espaces-propres de $\widehat{A_z}$ sont donc stables par u .

Comme ces sous espaces propres sont de dimension 1, ils sont engendrés par des vecteurs propres de E et E est donc diagonalisable par une même base B que $\widehat{A_z}$

On prend $B = ((X - z)^k)_{k=0..n}$. Les matrices M et N de E et $\widehat{A_z}$ dans B sont les matrices carrées d'ordre $n + 1$ de diagonales respectives $(a_0, \dots, a_n)$ et $(n, n - 1, \dots, 0)$.

Comme les valeurs $n, n - 1, \dots, 0$ sont deux à deux distinctes, il existe un unique polynôme P de $C_n[X]$ tel que pour tout $i \in [0, n]$, on ait $P(i) = a_{n-i}$ (polynômes d'interpolation de Lagrange).

On a alors $P(M) = N$ donc $P(\widehat{A_z}) = u$ et donc u est un polynôme en $\widehat{A_z}$

B. Définition de δ_ζ

6)

Remarquons que f est une involution (donc une bijection) de C^* sur C^* et $f = f^{-1}$

De plus $O \notin C$ On a donc pour z complexe non nul:

$$z \in f(C) \Leftrightarrow f^{-1}(z) \in C \Leftrightarrow f(z) \in C \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} - z_0 \right|^2 = R^2$$

$$\text{Soit: } |z|^2 R^2 = |1 - z_0 z|^2$$

$$\text{On obtient en développant: } z \bar{z} (|z_0|^2 - R^2) - 2 \operatorname{Re}(z_0 z) + 1 = 0$$

$$\text{Soit: } z \bar{z} - \frac{2}{|z_0|^2 - R^2} \operatorname{Re}(z_0 z) = -\frac{1}{|z_0|^2 - R^2}$$

$$\text{Ce qui donne: } \left| z - \frac{z_0}{|z_0|^2 - R^2} \right|^2 = \frac{R^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2}$$

$f(C)$ est donc le cercle de centre $\frac{z_0}{|z_0|^2 - R^2}$ et de rayon $\frac{R}{|z_0|^2 - R^2}$

7)

Il suffit de remplacer dans le calcul précédent les égalités par des inégalités:

$$z \in f(C^-) \Leftrightarrow f^{-1}(z) \in C^- \Leftrightarrow f(z) \in C^- \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} - z_0 \right|^2 < R^2$$

$$\text{Soit: } |z|^2 R^2 > |1 - z_0 z|^2$$

$$\text{Soit: } z \bar{z} - \frac{2}{|z_0|^2 - R^2} \operatorname{Re}(z_0 z) < -\frac{1}{|z_0|^2 - R^2}$$

$$\text{D'où finalement } z \in f(C^-) \Leftrightarrow \left| z - \frac{z_0}{|z_0|^2 - R^2} \right|^2 < \frac{R^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2}$$

On obtient donc la totalité de l'intérieur de $f(C)$ puisque $O \notin f(C)^-$

8)

$f(z_i)$ appartient à $f(C^-)$ donc comme $f(C^-)$ est convexe puisque c'est un disque

d'après l'hypothèse $O \in C^+$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \in f(C^-)$

$$\text{Donc } \delta_0 = f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}\right) \text{ est bien défini et } \delta_0 \in f \circ f(C^-) = C^-.$$

9)

On prend comme nouvelle origine ξ . L'affixe d'un point $M(z)$ devient alors $Z = z - \xi$

et on est ramené à la question précédente.

C. Condition d'apolarité

10)

$$\frac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi - z_i} \text{ (résultat du cours, que l'on retrouve aisément en calculant } P'(X) \text{ par}$$

dérivation successive de chaque terme)

$$\text{ce qui s'écrit aussi } \frac{n}{\xi - \delta_\xi} = \frac{P'(\xi)}{P(\xi)}$$

Si $P'(\xi)$ est non nul on a: $\delta_\xi - \xi = -n \frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$ d'où la relation demandée

11)

Rappelons que $A_z P(X) = (z - X)P'(X) + nP(X)$

Si z_i est racine de P on a $A_z P(z_i) = 0$ si et seulement si $(z - z_i)P'(z_i) = 0$, soit $P'(z_i) = 0$.

Si ξ n'est pas racine de P , alors $A_z P(\xi) = 0$ si et seulement si $(z - \xi)P'(\xi) + nP(\xi) = 0$

$P'(\xi)$ est alors non nul et ξ différent de z : ceci revient donc à $\boxed{\frac{1}{z-\xi} = -n \frac{P'(\xi)}{P(\xi)}}$ ce qui est précisément la condition $\delta_\xi = z$

12)

On écrit la formule de Taylor; $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(X-z)^k}{k!} P^{(k)}(z)$ et alors, vu que

$A_z((X-z)^n) = 0$, on obtient

$$A_z P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} A_z((X-z)^k) \frac{P^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(X-z)^k \frac{P^{(k)}(z)}{k!}$$

On voit alors que le degré de $A_z P(X)$ est strictement inférieur à $n-1$ si et seulement si $P^{(n-1)}(z) = 0$

$$\text{Or } P^{(n-1)}(X) = n!X - (n-1)! \left(\sum_{k=1}^n z_k \right).$$

Donc $P^{(n-1)}(z) = 0$ si et seulement si $\boxed{z = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right)}$ ce qui donne le résultat

demandé.

13)

a) Comme C_1^- est convexe, $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n z_k \right)$ appartient à C_1^- et est donc différent de z .

Donc, d'après la question précédente, $\deg A_z P(X) = n-1$.

b) Il existe un disque inclus strictement dans C_1^- contenant tous les points z_i . En effet si ω est le centre de C_1 et R son rayon, et si C_2 est le cercle de centre ω et de rayon $R' = \frac{1}{2}(R + \max(|z_i - \omega|))$ alors C_2^- est inclus dans C_1^- et donc C_2^- contient tous les points z_i . De plus, on a alors $z \in C_2^+$.

Montrons que tous les zéros de $A_z P(X)$ appartiennent tous à C_2^- . En effet, ses zéros sont soit les racines multiples de P (qui sont de z_i éléments de C_2^-) soit des éléments $\xi \in C \setminus \{z_i, i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ tels que $\delta_\xi = z$.

Or si $\xi \in C_2^+$, $\delta_\xi \in C_2^-$ et il est donc impossible que $\delta_\xi = z$.

Donc $\xi \in C_2^- \cup C_2$, et donc $\xi \in C_1^-$.

On a donc bien prouvé que tous les zéros de $A_z P$ sont dans C_1^-

Remarque: l'énoncé dit que $n \geq 2$ mais pour $n = 1$, l'hypothèse signifie que $z \neq z_1$ et on a alors $A_z(X - z_1) = (z - X) + X - z_1 = z - z_1$ et $\deg A_z(X - z_1) = 0$ (en particulier $A_z(X - z_1)$ est non nul)

14)

Il est clair que les constantes u et v non nulles ne changent rien au résultat précédent puisque A_z est linéaire.

Supposons que tous les z'_i ($i \in [1, n]$) appartiennent à $C \cup C^+$.

Montrons par récurrence descendante sur $p \in [1, n]$ que $\deg A_{z'_p} \dots A_{z'_n} P = p - 1$ et que pour $p > 1$

C'est vrai pour $p = 1$ d'après la question 13. Supposons que ce soit vrai à l'ordre $p > 1$. Alors en utilisant une factorisation de $A_{z'_p} \dots A_{z'_n} P$ et en appliquant la question 13 à nouveau, $A_{z'_{p-1}} \dots A_{z'_n} P$ est de degré exactement $p - 1$ et si $p - 1 > 1$, toutes les racines de $A_{z'_{p-1}} \dots A_{z'_n} P = A_{z'_{p-1}} (A_{z'_p} \dots A_{z'_n} P)$ sont encore dans C^- , ce qui termine la récurrence.

On en déduit donc que $\deg A_{z'_1} \dots A_{z'_n} P = 0$, et donc que P n'est pas apolaire par rapport à Q . Par contrapposition, on a le résultat demandé.

15)

Les polynômes du type donné par l'énoncé sont exactement les éléments de $C_{n-1}(X)$.

L'application h qui à un polynôme T de $C_{n-1}(X)$ associe $\int_0^1 T(a + t(b-a)) dt$ est une forme linéaire, et donc, en utilisant l'expression générale d'une forme linéaire dans la base canonique, il existe des complexes $c_0, \dots, c_{n-1}$ tels que pour tout polynôme T écrit sous la forme précédente:

$$\int_0^1 T(a + t(b-a)) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_k c_k$$

On a alors, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$h(X^k) = \int_0^1 (a + t(b-a))^k dt = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} = c_k \binom{n-1}{k} = c_k \binom{n-1}{n-1-k}$$

On a donc l'égalité demandée avec $b_k = (-1)^{n-1-k} c_{n-1-k} = (-1)^{n-1-k} \frac{b^{n-k} - a^{n-k}}{(n-k)(b-a)}$

16)

On prend $a_k = (-1)^k Y^{n-1-k}$ pour $k \in [0, n-1]$ et $Y \in C$

$$\text{On a alors } T(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k X^k Y^{n-1-k} = (Y - X)^{n-1}$$

$$\text{On a alors : } \int_0^1 (Y - a - t(b-a))^{n-1} dt = \left[-\frac{(Y-b)^n - (Y-a)^n}{n(b-a)} \right] =$$

$$\text{D'autre part: } \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} Y^{n-k-1} b_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-k} Y^k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k Y^k$$

(changement d'indice)

D'où le résultat avec $C_n = -\frac{1}{n(b-a)}$ puisque Y prend toute valeur complexe, donc on a une égalité de polynômes.

17)

$$\text{On a } \int_a^b P'(a + t(b-a)) dt = P(b) - P(a) = 0$$

$$\text{On a donc } (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}} \Delta(X) = 0$$

donc $\Delta(X)$ est apolaire par rapport à $P'(X)$

P' possède donc une racine dans un disque ouvert contenant toutes les racines de Δ

Or $\Delta(t) = 0$ si et seulement si il existe $k \in [0, n-1]$ tel que $X - b = \exp(\frac{2ik\pi}{n})(X - a)$

(avec $k \in [0, n-1]$ soit

$$X = \frac{b - a \exp(\frac{2ik\pi}{n})}{1 - \exp(\frac{2ik\pi}{n})} \text{ (avec } k \in [1, n-1] \text{)}$$

$$\text{Or, pour un tel } X, \text{ on a } \left| X - \frac{(a+b)}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2} \left| \frac{1 + \exp(\frac{2ik\pi}{n})}{1 - \exp(\frac{2ik\pi}{n})} \right| = \frac{|b-a|}{2} \left| \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \right|$$

$$\text{Or, pour } k \in [1, n-1] \text{ on a } n-k \in [1, n-1] \text{ et } \left| \frac{\cos(\frac{(n-k)\pi}{n})}{\sin(\frac{(n-k)\pi}{n})} \right| = \left| \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \right| \text{ et pour}$$

$$1 \leq k \leq \frac{n}{2}, \left| \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \right| = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}$$

$$\text{est maximal pour } k = 1. \text{ On a en conclusion } \left| X - \frac{(a+b)}{2} \right| \leq \frac{|b-a|}{2} \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}$$

pour toute racine X de P

Tout disque ouvert de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $R > R_n(a, b)$ contient donc une racine de P' .

Comme les racines de P' sont en nombre fini, il existe donc une racine de P' dans le disque fermé de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $R_n(a, b)$.

(Sinon, on aurait un contre-exemple en prenant $R_n(a, b) < R < \min\{|z - \frac{a+b}{2}| : z \text{ racine de } P'\}$)

Complément: Démonstration de l'égalité admise(indications)

Si les t_i sont deux à deux distincts la famille $(1, (X - t_1)^{n-1}, (X - t_2)^{n-1}, \dots, (X - t_{n-1})^{n-1})$ forme une famille libre (en effet, si l'on a une relation de dépendance linéaire entre ces polynômes, on dérive successivement cette relation aux ordres $1, \dots, n-1$, et on fait $X = 0$. On obtient un système homogène dont le déterminant se ramène à un Vandermonde), donc une base de $C_{n-1}(X)$; De plus, $A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}} ((X - t_{n-1})^{n-1}) = 0$ et comme les A_{t_i} "commutent" (et que la composition est associative), on a pour tout $k \in [1, n-1]$: $A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}} ((X - t_k)^k) = 0$. Enfin, par un calcul aisé, 1 étant vecteur propre de tous les A_{t_i} on a $A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}}(1) = (n-1)!$

On a donc, si un polynôme Δ s'écrit

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (X - t_i)^{n-1} : \quad A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}}(\Delta) = (n-1)! \alpha_0$$

Il faut donc calculer

$$\alpha_0 : \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (X - t_i)^{n-1} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (-1)^{n-1-k} t_i^{n-1-k} \right) =$$

$$\alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (-1)^{n-1-k} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t_i^{n-1-k} \right) \quad (1)$$

On a donc comme $\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \binom{n-1}{k} X^k$, on a::

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = \alpha_0 + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t_i^{n-1} \right) \\ \forall k \in [1, n-1] \\ \binom{n-1}{k} b_k = (-1)^{n-1-k} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \binom{n-1}{k} t_i^{n-1-k} \right) \end{array} \right.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} b_k a_{n-1-k} = (-1)^{n-1} a_{n-1} \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_{n-1-k} t_i^{n-1-k} \right) =$$

$$a_{n-1} \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i P'(t_i) = a_{n-1} \alpha_0 \text{ puisque } t_i \text{ est racine de } P'$$

Finalement:

$$\boxed{(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}}(\Delta) = (-1)^{n-1} a_{n-1} \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} b_k a_{n-1-k}}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer

Lorsque deux t_i ou plus sont égaux, la formule est encore vraie par continuité et densité.

En effet pour Δ et a_{n-1} fixés, l'application $(t_1, \dots, t_{n-1}) \rightarrow (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}}(\Delta)$ est continue par les théorèmes usuels, les a_i sont des fonctions continues de t_k

(fonctions symétriques) et donc $(t_1, \dots, t_{n-1}) \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} b_k a_{n-1-k}$ est une

fonction continue.

Enfin, l'ensemble des suites $(t_1, \dots, t_{n-1})$ de complexes 2 à 2 distincts est partout dense dans $\mathbb{C}^{n-1}$