

**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES**  
**CONCOURS E4A, FILIÈRE PSI, ÉPREUVE A, 2003**

---

## Partie I.

### Question 1.

1.1. On vérifie que la fonction  $\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (et de classe  $\mathcal{C}^2$  par morceaux) sur  $\mathbb{R}$  avec  $\theta' = \theta_1$  fonction impaire,  $2\pi$ -périodique, telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \theta_1(x) = -2x \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \theta_1(x) = 2(x - \pi) \end{cases} .$$

1.2. La fonction  $\theta_1$  étant impaire, on a  $a_n(\theta_1) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $b_n(\theta_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta_1(x) \sin nx dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculons :

$$\begin{aligned} b_n(\theta_1) &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2x) \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2(x - \pi) \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi} (1 - (-1)^n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx \\ &= -\frac{4}{\pi} (1 - (-1)^n) \left( -\frac{\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) . \end{aligned}$$

Finalement,  $b_{2p}(\theta_1) = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , et  $b_{2p+1}(\theta_1) = \frac{8(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^2}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

La série de Fourier de  $\theta_1$  est donc  $\frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x$ .

La fonction  $\theta_1$  est continue, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, donc  $\theta_1$  est somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta_1(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x$$

et il y a convergence normale de cette série sur  $\mathbb{R}$ .

**Question 2.** La fonction  $\theta$  est paire, donc  $b_n(\theta) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une intégration par parties, en tenant compte de  $\theta' = \theta_1$ , donne  $a_n(\theta) = -\frac{1}{n} b_n(\theta_1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Enfin,

$$a_0(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta(x) dx = 0$$

(on peut par exemple observer la symétrie  $\theta(\pi - x) = -\theta(x)$ ). La série de Fourier associée à la fonction  $\theta$  est donc  $\frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \cos(2p+1)x$ . Comme  $\theta$  est  $2\pi$ -périodique, de classe

$\mathcal{C}^1$ , cette série converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $\theta$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \cos(2p+1)x .$$

m03rs1ca.tex - page 1

La fonction  $\Phi$  est la primitive de  $\theta$  qui s'annule en 0 ; c'est une fonction  $2\pi$ -périodique car

$a_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(x) dx = 0$ . Elle est impaire donc  $a_n(\Phi) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Une

intégration par parties donne  $b_n(\Phi) = \frac{1}{n} a_n(\theta)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc la série de Fourier

de  $\Phi$  est  $\frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x$ . Ici encore, il y a convergence normale de cette série vers la fonction  $\Phi$  ( $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ ) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x .$$

## Partie 2.

(1) est une équation aux dérivées partielles, et je suppose que  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et non  $\mathbb{R}_-$ .

### Question 1.

1.1. Si  $\begin{cases} \forall x \in [0, \pi] & g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+^* & h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$  alors, pour tout  $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) = g''(x) h(t) = \mu g(x) h(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = g(x) h'(t) = \mu g(x) h(t) ,$$

donc la relation (1) est satisfaite sur  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ .

1.2.  $h'(t) - \mu h(t) = 0 \iff h(t) = C e^{\mu t}$  avec  $C \in \mathbb{R}$  ;

$$g''(x) - \mu g(x) = 0 \iff g(x) = \begin{cases} A x & + & B & \text{si } \mu = 0 \\ A \cos \sqrt{-\mu} x + B \sin \sqrt{-\mu} x & & & \text{si } \mu < 0 \\ A e^{\sqrt{\mu} x} & + & B e^{-\sqrt{\mu} x} & \text{si } \mu > 0 \end{cases} .$$

1.3. On a  $g_k(x) = A_k \cos kx + B_k \sin kx$  et  $h_k(t) = C_k e^{-k^2 t}$ , donc

$$V_k(x, t) = (A_k \cos kx + B_k \sin kx) e^{-k^2 t}$$

(la constante  $C_k$  est superflue).

Les conditions au bord (2) imposent  $A_k = 0$ , donc  $V_k(x, t) = B_k \sin kx e^{-k^2 t}$  et cette fonction vérifie (1), (2) et (3) quel que soit le choix de la constante  $B_k$ .

### Question 2.

2.1. Si on cherche  $H$  sous la forme  $H(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin kx e^{-k^2 t}$  (somme d'une série trigonométrique supposée convergente), on a  $H(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin kx$ . La relation (4) impose

$$H(x, 0) = \Phi(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x ,$$

elle est donc vérifiée en prenant  $d_k = b_k(\Phi)$ , soit  $d_{2p} = 0$  et  $d_{2p+1} = \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4}$ . Il est cependant difficile, sans hypothèse supplémentaire par exemple sur le mode de convergence de la série, d'affirmer que c'est la seule solution à la question. Il est en fait exact que deux

séries trigonométriques ayant la même somme ont les mêmes coefficients, mais c'est un résultat difficile et hors programme.

**2.2.** Posons donc  $H(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ , soit  $H = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k R_k$ , où les  $d_k$  sont les coefficients déterminés à la question précédente. La fonction  $H$  est bien définie sur  $\Omega$  (et même sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ) et il y a convergence normale de la série définissant  $H$  puisque le terme d'indice  $p$  est majoré en valeur absolue par  $\frac{8}{\pi (2p+1)^4}$ .

La série  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial x}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \cos(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$  converge normalement

sur  $\Omega$ , ainsi que la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ , ce qui permet de dériver deux fois terme à terme par rapport à la variable  $x$ , donc

$$\forall (x, t) \in \Omega \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x, t).$$

De même, la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$  converge normalement sur  $\Omega$ , ce qui permet de dériver terme à terme par rapport à la variable  $t$  et

$$\forall (x, t) \in \Omega \quad \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x, t).$$

**Question 3.** Soit la fonction  $H : (x, t) \mapsto H(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ .

La fonction  $H$  est définie et continue sur  $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$  (et même sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  car impaire et  $2\pi$ -périodique en la variable  $x$ ). Les calculs faits à la question précédente montrent que  $H$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial H}{\partial t}$  et  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$  continues sur  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ , et même sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  (convergence normale des séries).

La série  $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial t^2}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$  converge normalement

sur tout compact inclus dans l'ouvert  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , d'où l'existence d'une dérivée partielle  $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$  continue sur  $U$ . On montre de même l'existence et la continuité de dérivées partielles

$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}$  et  $\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}$ , toutes deux égales à  $\frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} \cos(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ .

Donc  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ . On a vérifié (question précédente) que  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}$  sur  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ . La vérification de (2) est immédiate. Celle de (4) est conséquence de la

question **2.1**. Pour **(3)**, majorons grossièrement : on a  $(2p+1)^2 \geq 2p+1$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , donc

$$|H(x, t)| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-(2p+1)t} = \frac{8}{\pi} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}},$$

donc, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(x, t) = 0$ .

## Partie 3.

### Question 1.

**1.1.**  $E \subset \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $E \neq \emptyset$  et la stabilité par combinaisons linéaires est immédiate, donc  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ .

**1.2.** C'est évident : si l'ensemble  $\mathcal{E}_\Phi$  des solutions du problème **(P)** est non vide (ce qui est le cas, cf. **Partie 2, question 3**), alors  $\mathcal{E}_\Phi$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$  de direction  $E$ .

### Question 2.

*Pour traiter les questions qui suivent, les hypothèses de l'énoncé sont insuffisantes. La fonction  $\omega$  est en effet supposée continue sur le fermé  $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ , ce qui d'ailleurs n'est pas conforme au programme puisqu'on n'est censé parler que de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un ouvert, et  $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$  n'est pas un ouvert. Mais surtout, à partir de la question **2.2.**, nous aurons besoin de l'existence d'une dérivée partielle  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$  en les points de la forme  $(x, 0)$  avec  $x \in [0, \pi]$ , ce qui n'est mentionné nulle part dans l'énoncé.*

*En supposant de plus les fonctions  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$  continues en les points  $(x, 0)$ , la relation **(1)** de l'énoncé se prolongera en ces points (utile pour la question **2.2.**) et le calcul intégral de la question **2.3.** sera justifié.*

**2.1.** • Pour  $t = 0$ , on a  $\omega(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ , donc la dérivée partielle  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$  est définie en ces points et vaut 0, puis  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \omega(x, 0) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, 0) \right] = 0$ , donc l'intégrale proposée est nulle.

• Pour  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto \omega(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, \pi]$ , d'où l'existence de l'intégrale proposée, qui vaut alors  $\left[ \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right]_{x=0}^{x=\pi} = 0$  puisque  $\omega(0, t) = \omega(\pi, t) = 0$ .

**2.2.** Pour  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on a, en utilisant **(1)**,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right) &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \omega(x, t) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t) \\ &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) \\ &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial (\omega^2)}{\partial t}(x, t), \end{aligned}$$

d'où le résultat, qui reste vrai pour  $t = 0$  sous quelques hypothèses supplémentaires mentionnées plus haut.

**2.3.** En admettant donc la continuité des fonctions  $\frac{\partial\omega}{\partial x}$  et  $\frac{\partial\omega}{\partial t}$  en les points  $(x, 0)$ , les théorèmes usuels donnent la continuité sur  $\mathbb{R}_+$  des fonctions

$$t \mapsto \int_0^\pi \left( \frac{\partial\omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \quad \text{et} \quad t \mapsto \int_0^\pi \omega(x, t) \frac{\partial\omega}{\partial t}(x, t) dx .$$

Alors  $\psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\begin{aligned} \psi'(T) &= \int_0^\pi \left( \frac{\partial\omega}{\partial x}(x, T) \right)^2 dx + \int_0^\pi \omega(x, T) \frac{\partial\omega}{\partial t}(x, T) dx \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{\partial\omega}{\partial x}(x, T) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x, T) dx \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Donc  $\psi$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ , mais  $\psi(0) = 0$ , donc  $\psi = 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par ailleurs, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \int_0^\pi \omega(x, t) \frac{\partial\omega}{\partial t}(x, t) dx \right) dt &= \int_0^\pi \left( \int_0^T \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} \omega^2(x, t) \right]_{t=0}^{t=T} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \omega^2(x, T) dx , \end{aligned}$$

donc  $\psi(T)$  est la somme de deux termes positifs. Les deux termes sont nuls, en particulier

$$\forall T \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^\pi \omega^2(x, T) dx = 0 .$$

**2.4.** La fonction  $x \mapsto \omega^2(x, T)$  est continue et positive sur  $[0, \pi]$  et son intégrale est nulle ; elle est donc identiquement nulle. Donc  $\omega = 0$  sur  $\Omega$ .

**2.5.** Le problème **(P)** a donc une solution unique, qui est la fonction  $H$  obtenue à la **question 3.** de la **partie 2.**