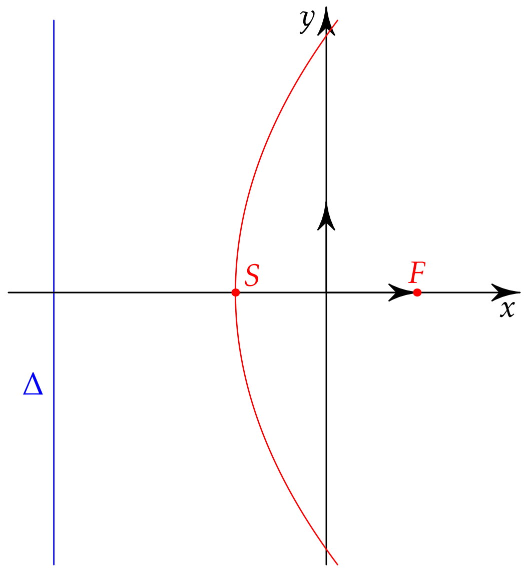
I Un premier exemple

I.A -

I.A.1) On a très facilement : $\mathrm{d}(P,F)^2 = (x-1)^2 + y^2$, et : $\mathrm{d}(P,\Delta)^2 = (x+3)^2$.

I.A.2) C'est la définition d'une parabole par son foyer F et sa directrice Δ.
Son équation cartésienne est donc : $(x+3)^2 = (x-1)^2 + y^2$, ou,
après simplification : $y^2 = 8(x+1)$.

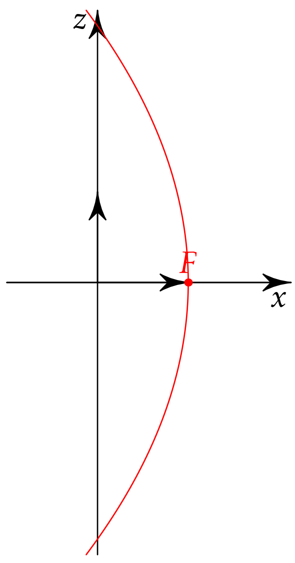
I.A.3) On a déjà répondu à la question !
Il reste à faire le graphe.



I.A.4) Si on pose $y = 4t$, alors, on a bien : $x + 1 = 2t^2$, ou encore : $x = 2t^2 - 1$.

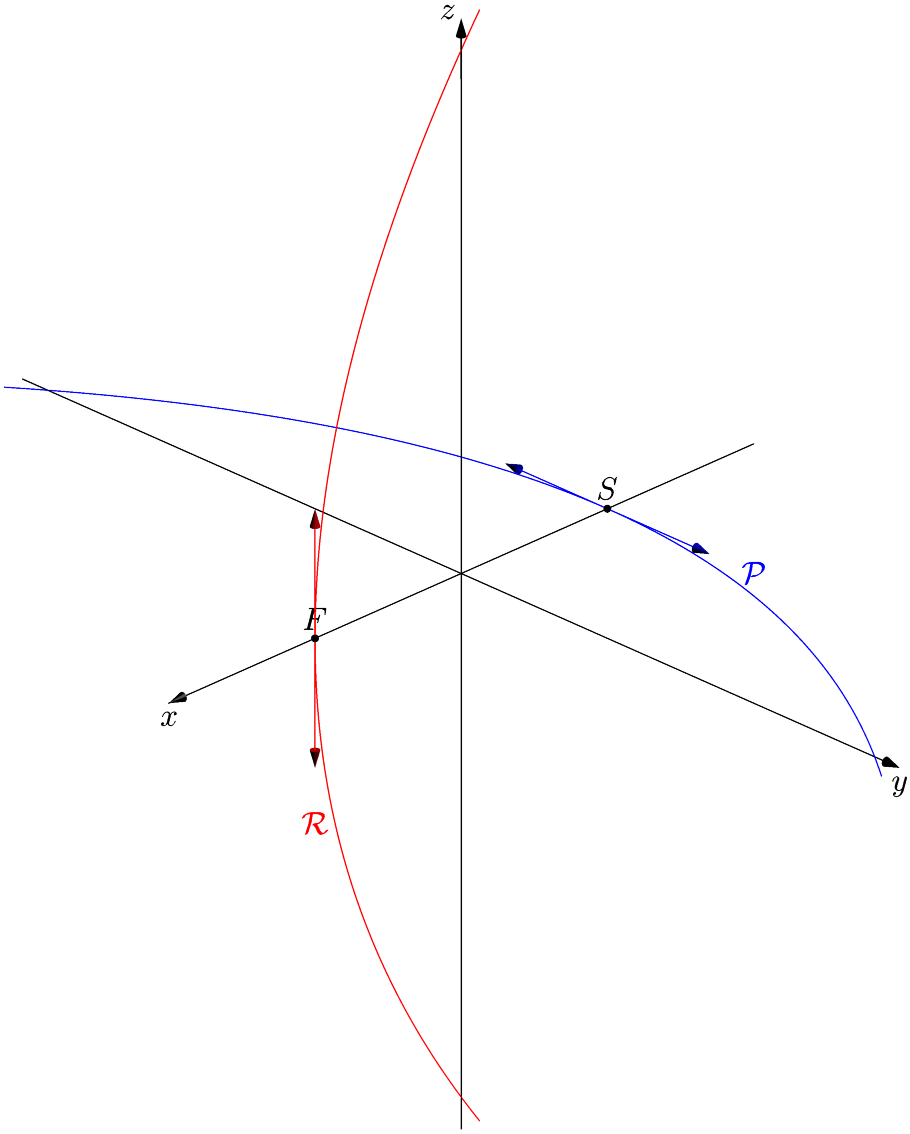
I.B -

I.B.1) On a $x = 1 - 2u^2$, et, $z = 4u$. Ce qui nous donne : $x = 1 - \dfrac{z^2}{8}$.
C'est l'équation d'une parabole dans le plan xOz, qui passe bien par F, le point de coordonnées $(1,0,0)$ dans l'espace.



I.B.2) Si on change x en $-x$, y en z, et, z en y, on échange $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.
Ces deux paraboles sont donc symétriques par rapport à la droite passant par O et de vecteur directeur de coordonnées $(0,1,1)$.

I.B.3) Voici le graphe en 3D demandé.



I.C -

I.C.1) On a $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}4t\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{r}\begin{pmatrix}-4u\\0\\4\end{pmatrix}$

I.C.2) Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2-2u^2-2t^2\\-4t\\4u\end{pmatrix}$ permet par simple produit vectoriel d'obtenir

$\overrightarrow{p_1}\begin{pmatrix}16u\\16ut\\8u^2-8t^2-8\end{pmatrix}$, ainsi que $\overrightarrow{r_1}\begin{pmatrix}16t\\8t^2-8u^2-8\\16ut\end{pmatrix}$

I.C.3) Les vecteurs tangents et le vecteur $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas nuls, et les vecteurs tangents ne sont jamais dans la direction de $\overrightarrow{PR}$, donc, les vecteurs $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{r_1}$ ne sont jamais nuls.

I.D - Pour que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ fassent illusion, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{r_1}=0$.
$\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{r_1}=64(4ut+2ut(u^2-t^2-1+2ut(t^2-u^2-1))=0$, les courbes font bien illusion.

I.E -

I.E.1) On a $\overrightarrow{PM} = \mu \overrightarrow{PR}$, donc $M \in [PR] \Leftrightarrow \mu \in [0,1]$.
M n'est pas sur $[PR]$ si et seulement si $\mu \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

I.E.2) On a les égalités $\begin{cases} x - 2t^2 + 1 = \mu(2 - 2u^2 - 2t^2) \\ y - 4t = \mu(-4t) \\ z = \mu(4u) \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x = 2t^2 - 1 + \mu(2 - 2u^2 - 2t^2) \\ y = 4t + \mu(-4t) \\ z = \mu(4u) \end{cases}$

De la deuxième égalité, on en déduit facilement : $t = \dfrac{y}{4(1-\mu)}$.

La dernière égalité donne encore plus facilement : $u = \dfrac{z}{4\mu}$.

I.E.3) On replonge ces résultats dans la première égalité, ce qui donne :
$x = 2\dfrac{y^2}{16(1-\mu)^2} + \mu\left(2 - 2\dfrac{z^2}{16\mu^2} - 2\dfrac{y^2}{16(1-\mu)^2}\right)$.
On aura donc illusion si et seulement si il existe un μ convenable qui correspond à la valeur de x, c'est à dire si et seulement si x appartient à l'image de cette fonction de μ.

I.E.4) Si $y = z = 0$, $x = 2\mu - 1$, compte tenu des valeurs de μ convenables, équivaut à $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

II Coplanéarité et alignement

II.A -

II.A.1) Si V n'est pas nul, et si ses trois premières coordonnées sont nulles, cela implique que la dernière, h, n'est pas nulle.

Mais, alors, $LV = \begin{bmatrix} h \\ h \\ h \\ h \end{bmatrix}$ n'est pas nul.

Alors V n'est pas dans le noyau de L, il n'existe pas de vecteur de $\ker(f)$, non nul et dont les trois premières composantes sont nulles.

II.A.2) f est un endomorphisme, donc $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si 0 est valeur propre de f, c'est à dire si et seulement si le déterminant, produit des valeurs propres réelles ou complexes, est nul.

II.A.3) Si $LV = 0$, alors sa première composante est nulle, et donc : $ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0$.
Ce qui implique que M_1 appartient au plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$.
On a le même résultat pour M_2, M_3 et M_4 en regardant les autres composantes de LV.
Ces quatre points sont donc coplanaires.

II.A.4) Réciproquement, si ces quatre points sont coplanaires, leurs coordonnées vérifient une équation du type $ux + vy + wz + h = 0$, avec u, v, et w non tous nuls.

En appelant $V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix}$, on a $LV = 0$.

Le déterminant de L est donc nul, en utilisant la question **II.A.2)**.
On a bien l'équivalence demandée.

II.B -

II.B.1) Le rang de S est celui de ${}^tS$, ce qui signifie ici que les trois premières colonnes de ${}^tL$ sont liées.

Le rang de L est donc inférieur ou égal à 3, le déterminant de L est alors nul, et enfin M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires.

Mais ceci est vrai pour tout point M_4 de l'espace : M_1, M_2, M_3 sont donc alignés !

II.B.2) Si M_1, M_2, M_3 sont alignés, alors M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires pour tout point M_4 de l'espace.

Alors le déterminant de L est nul, son rang n'est pas 4. Et ceci est vrai quelle que soit la dernière ligne de L (ou la dernière colonne de ${}^tL$).

Ce qui signifie que les trois premières lignes de L sont liées, et donc les trois lignes de S sont liées, S est au plus de rang 2.

Encore une fois, on a bien l'équivalence demandée.

II.C -

II.C.1) Compte tenu de la dernière coordonnée qui vaut 1, V_1 et V_2 sont liés si et seulement si ils sont égaux, ce qui équivaut à ce que leurs trois premières coordonnées sont égales, ou encore $M_1 = M_2$.

$M_1 \neq M_2 \Leftrightarrow (V_1, V_2)$ forment une famille libre.

II.C.2) M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si le rang de S n'est pas 3, c'est à dire si et seulement si la famille (V_1, V_2, V_3) est liée.

Comme (V_1, V_2) est libre, ceci équivaut à l'existence de μ et λ tels que $V_3 = \mu V_1 + \lambda V_2$.

Compte tenu de la dernière coordonnée, cela équivaut encore à l'existence de μ
tel que $V_3 = \mu V_1 + (1-\mu)V_2$.

II.D -

II.D.1) On a donc ici M_1, M_2, M_3 alignés et $M_1 \neq M_2$,
ce qui donne l'existence de μ tel que $V_3 = \mu V_1 + (1-\mu)V_2$.

La troisième ligne est combinaison linéaire des deux premières.

Le même raisonnement depuis le départ en échangeant les rôles de M_3 et M_4 fournit la quatrième ligne combinaison des deux premières.

II.D.2) Le rang de L est donc au plus 2.

Mais les vecteurs (V_1, V_2) forment une famille libre, le rang de L est au moins 2.

Finalement, le rang de L est alors égal à 2, et la dimension de $\ker(f)$ est 2, par application du théorème du rang pour un endomorphisme en dimension 4.

II.D.3) $\ker(f)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, qui est donc valeur propre au moins double.

II.E -

II.E.1) M_2, M_3 et M_4 ne sont pas alignés, donc la famille (V_2, V_3, V_4) est libre.

M_1', M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires, donc la famille (V_1', V_2, V_3, V_4) est liée.

On a donc l'existence de β_1, γ_1 et δ_1 tels que $V_1' = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4$ avec $\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$ en regardant la dernière composante.

II.E.2) On a $V_1' = (0, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)L$.

On recommence la même opération avec M_2', et M_1, M_3, M_4.

On obtient $V_2' = \alpha_2 V_1 + \gamma_2 V_3 + \delta_2 V_4$ avec $\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 1$ en regardant la dernière composante.

Ce qui donne $V_2' = (\alpha_2, 0, \gamma_2, \delta_2)L$.

On refait deux fois la même manipulation, et, finalement : $L' = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 0 \end{bmatrix} L$

On a bien une matrice T à termes diagonaux nuls qui convient.

II.E.3) $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1+\gamma_1+\delta_1\\\alpha_2+\gamma_2+\delta_2\\\alpha_3+\beta_3+\delta_3\\\alpha_4+\beta_4+\gamma_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Ce vecteur est donc un vecteur propre de T pour la valeur propre 1.

II.E.4) L est inversible car M_1, M_2, M_3 et M_4 ne sont pas coplanaires.

Le rang de T est donc le rang de L'.

M_1', M_2', M_3' et M_4' sont alignés, le rang de L' est donc au plus 2, celui de T aussi.

Le rang de L' est 1 si et seulement si M_1', M_2', M_3' et M_4' sont confondus. Ceci est impossible puisque M_1, M_2, M_3 et M_4 ne sont pas coplanaires.

Le rang de L' et de T est donc égal à 2.

II.E.5) 2 est valeur propre au moins double de T, 1 est valeur propre de T, et la trace, qui est la somme des valeurs propres est nulle.

On a donc 0, valeur propre double, et 1 et-1 valeurs propres simples de T.

II.E.6) Les points M_i'' étant les milieux de M_i et M_i', on a $L''=(L+L')/2$.

On a donc $L''=\dfrac{I_4+T}{2}L$, ou encore $L''L^{-1}=\dfrac{I_4+T}{2}$.

Si un appelle U un vecteur propre de T pour la valeur propre -1, on a $L''L^{-1}U=\dfrac{I_4+T}{2}U=0$.

Donc $L^{-1}U$, qui est non nul, est dans le noyau de L'', L'' n'est donc pas inversible.

II.E.7) Finalement, les points M_1'', M_2'', M_3'' et M_4'' sont coplanaires.

III Un deuxième exemple

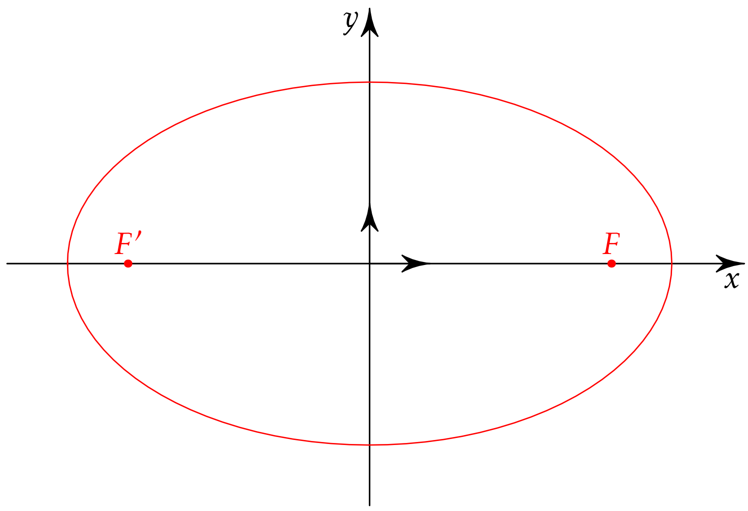
III.A -

III.A.1) On a, dans le plan d'équation $z=0$, la courbe $\mathcal{P}$ qui a pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$.

C'est donc une ellipse.

Comme $a=5$ et $b=3$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$, les foyers, dans le plan xOy, sont donc $F(4,0,0)$ et $F'(-4,0,0)$.

III.A.2) On va aussi placer les foyers sur la courbe :



III.B -

III.B.1) La courbe $\mathcal{R}$, dans le plan d'équation $y=0$, a pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$, mais on ne décrit que la partie où $x>0$.

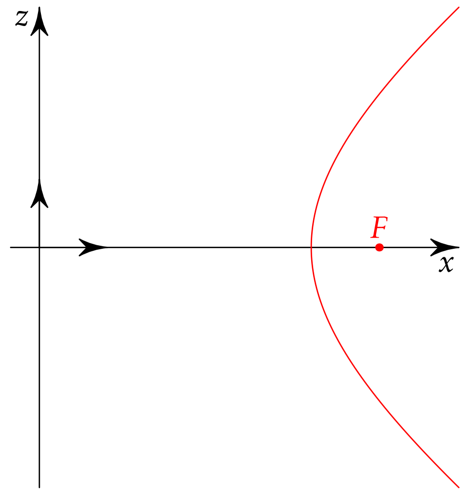
C'est donc une branche d'hyperbole.

III.B.2) Les asymptotes vérifient $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 0$, ou encore $\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3}\right) = 0$.

Ce sont donc les droites d'équation $y = \dfrac{3}{4}x$, et, $y = -\dfrac{3}{4}x$.

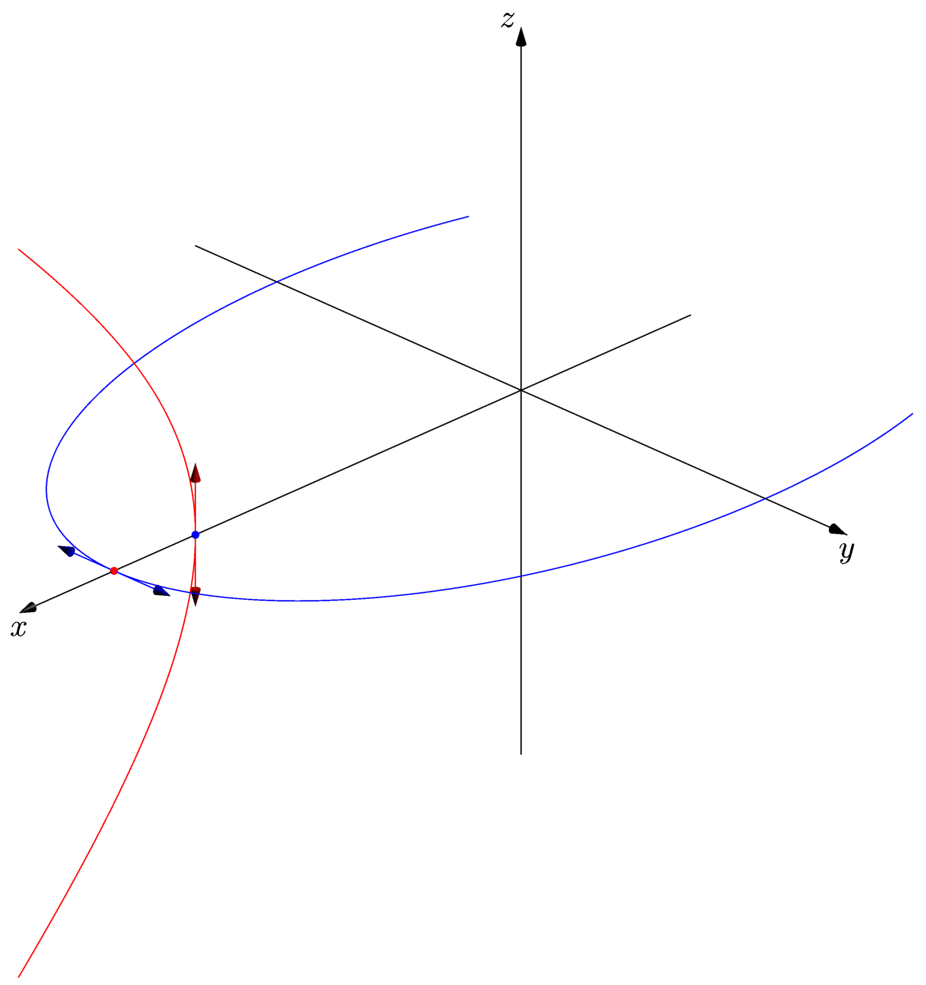
III.B.3) On va aussi chercher les foyers. Ici, $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, les foyers, dans le plan xOz, sont donc $F(5, 0, 0)$ et $F'(-5, 0, 0)$.

Seul F apparait sur le graphe.



III.C - Les foyers sont de la couleur des courbes...

On a un peu coupé l'ellipse, pour plus de clarté.



III.D - Le calcul est élémentaire, on obtient $\overrightarrow{p}\begin{bmatrix}-5\sin(t)\\3\cos(t)\\0\end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{r}\begin{bmatrix}4\,\mathrm{sh}u\\0\\3\,\mathrm{ch}u\end{bmatrix}$

III.E -

III.E.1) V_1 et V_2 forment clairement une famille libre. Le résultat demandé est celui du **II.C**.

III.E.2) On obtient facilement $x = 5\mu\cos(t) + 4(1-\mu)\,\mathrm{ch}(u)$, $y = 3\mu\sin(t)$, et, $z = 3(1-\mu)\,\mathrm{sh}()u$.

III.E.3) $V_3 = \mu V_1 + (1-\mu)V_2$ équivaut à la même égalité pour leurs trois premières coordonnées.
C'est à dire équivaut à $\overrightarrow{OM} = \mu\,\overrightarrow{OP} + (1-\mu)\,\overrightarrow{OR}$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OR} = \mu\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}\right)$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{RM} = \mu\,\overrightarrow{RP}$
La condition géométrique est que M n'appartient pas à $[PR]$, c'est à dire $\mu \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

IV Recherche de l'ensemble des solutions

IV.A - $\varphi(t,u) = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{F'(t)}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{G'(u)}\right) = 0$, car les courbes font illusion, et les vecteurs dérivés dirigent les tangentes aux courbes.

IV.B -

IV.B.1) $\left\|\overrightarrow{PR}\right\| = \left(\overrightarrow{G(u)} - \overrightarrow{F(t)}\right)\cdot\left(\overrightarrow{G(u)} - \overrightarrow{F(t)}\right)$

Ce qui donne $\dfrac{\partial\left\|\overrightarrow{PR}\right\|}{\partial u} = 2\,\overrightarrow{G'(u)}\cdot\left(\overrightarrow{G(u)} - \overrightarrow{F(t)}\right) = 2\,\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{G'(u)}$

IV.B.2) Quand on est au minimum de distance, ces dérivées partielles sont nulles, et donc $\overrightarrow{G'(u_0)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P_0R_0}$.
En échangeant les rôles de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, on obtient aussi $\overrightarrow{F'(t_0)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P_0R_0}$.

IV.C -

IV.C.1) On mène quelques calculs préliminaires.

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\0\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Yv\\-Xv\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}YZ'-ZY'\\ZX'-XZ'\\XY'-YX'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}Yv\\-Xv\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}YZ'-ZY'\\ZX'-XZ'\\XY'-YX'\end{bmatrix} = \left(\left(X^2+Y^2\right)Z' - YZY' - XZX'\right)v = \varphi(t,u) = 0$$

Comme v n'est pas nul, car le vecteur dérivé n'est pas nul, on obtient la condition de nullité de $\varphi(t,u)$: $\left(X^2+Y^2\right)Z' - YZY' - XZX' = 0$

IV.C.2) L'origine du repère étant P, et $R \neq P$, on a $X^2+Y^2+Z^2 \neq 0$.
Ce qui assure que la fonction h est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Après quelques calculs qu'on abrège ici, on obtient :

$$h'(u) = \frac{2Z\left(\left(X^2+Y^2\right)Z' - YZY' - XZX'\right)}{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)^2} = 0.$$

IV.C.3) La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.

IV.C.4) Remarquons que $X^2+Y^2 \neq 0$, car, sinon, $\overrightarrow{F'(t)}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{PR}$.
On a donc $h(u) = k \in [0,1[$.
$\mathcal{S}(t)$ a donc pour équation $k(X^2+Y^2)+(k-1)Z^2 = 0$.
Si $k = 0$, c'est le plan XOZ. Il passe bien par P et est normal à $\overrightarrow{F'(t)}$.
Si $k \neq 0$, c'est
- Un cône du second degré de sommet P, car l'équation est polynomiale de degré homogène ;
- Une surface de révolution d'axe OZ, car c'est une fonction de X^2+Y^2 et Z

On a donc bien un cône de révolution de sommet P et d'axe dirigé par $\overrightarrow{F'(t)}$.

IV.D -

IV.D.1) $\mathcal{R}$ est contenue dans $\mathcal{S}(t_0)$, donc $R_0 \in \mathcal{S}(t_0)$.

IV.D.2) $\overrightarrow{F'(t_0)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P_0R_0}$, donc $vZ_0 = 0$ et enfin $Z_0 = 0$.
On en déduit que $h(u_0) = Z_0 = 0$, et donc $h(u) = 0$, ce qui donne $Z = 0$.
$\mathcal{R}$ est bien dans le plan Γ, passant par P_0 et normal à $\overrightarrow{F'(t_0)}$.

IV.E -

IV.E.1) $\overrightarrow{F'(t)}$ et $\overrightarrow{G'(u)}$ forment une famille libre, et $\overrightarrow{PR}$, qui est non nul est orthogonal à ces deux vecteurs.
Les deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ ne sont donc pas dans un même plan.
$\mathcal{P}$ n'est donc pas tracée sur le plan Γ.

IV.E.2) Si $\mathcal{S}(t_1)$ était un plan, il serait normal à $\overrightarrow{F'(t_1)}$
Si $\overrightarrow{F'(t_0)}$ et $\overrightarrow{F'(t_1)}$ étaient colinéaires, alors $\overrightarrow{P_0R}$ et $\overrightarrow{P_1R}$ seraient orthogonaux à ces vecteurs, et $\overrightarrow{P_0P_1}$ aussi.
Donc P_1 serait dans le plan Γ, ce qui est impossible.
Ce qui prouve que $\mathcal{S}(t_1)$ est bien un cône de révolution.

IV.F -

IV.F.1) $\mathcal{R}$ est donc dans l'intersection du plan Γ et d'un cône de révolution.
De plus, elle n'est pas contenue dans une droite, elle est donc incluse dans une conique propre : une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

IV.F.2) En inversant les rôles de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ vérifie la même propriété et est donc incluse dans le plan Π normal à $\overrightarrow{G'(u_0)}$, passant par R_0.
$\overrightarrow{P_0R_0}$ est normal à $\overrightarrow{F'(t_0)}$ et $\overrightarrow{G'(u_0)}$.
De plus, $\overrightarrow{F'(t_0)} \wedge \overrightarrow{P_0R_0}$ et normal à $\overrightarrow{G'(u_0)} \wedge \overrightarrow{P_0R_0}$, ce qui entraine $\overrightarrow{F'(t_0)}$ normal à $\overrightarrow{G'(u_0)}$.
Les plans Γ et Π sont bien orthogonaux.