

# X-ENS MP 2022

## Corrigé de Mathématiques B

m.laamoum@gmail.com

Première partie : Développement Eulérien de cotan et calcul de  $\zeta(2n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1.a) Pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  posons

$$u_n(x) = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$

On a

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2} \sim \frac{-2x}{n^2}$$

ainsi la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

1.b) Comme  $g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$  alors  $g$  est impaire.

De plus  $f$  est impaire donc  $D$  l'est aussi.

1.c) Soit  $N \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{x+1+n} + \frac{1}{x+1-n} \right) &= \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

par passage à la limite sur  $N$  on obtient  $g(x+1) = g(x)$ .

$f$  est 1 périodique donc  $D$  l'est aussi.

1.d) Soit  $N \in \mathbb{N}$ , pour  $x \in ]N, N+1[$  écrivons

$$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$$

Si  $n > N$ , nous avons

$$\left| \frac{1}{x^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - N^2}$$

donc la série  $\sum_{n>N} \frac{1}{x^2 - n^2}$  converge normalement et uniformément sur  $]N, N+1[$ . Ainsi  $g$  est continue sur  $]N, N+1[$

donc elle est sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , par parité  $g$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  donc  $D$  l'est aussi.

2.a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on a

$$f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi \cotan\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{\cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \frac{-\pi}{\cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \pi \cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right). \\ &= \pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ &= 2f(x) \end{aligned}$$

2.b) On a

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x-2n} \right) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x+2n+1} + \frac{2}{x-2n+1} \right)$$

cette dernière série s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x-2n+1} + \frac{2}{x+2n-1} \right) + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x+2n+1} - \frac{2}{x+2n-1} \right)}_{\text{somme télescopique}}$$

qui vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x+2n-1} + \frac{2}{x-(2n-1)} \right) - \frac{2}{x+1}$$

ainsi

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x-2n} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{x+2n-1} + \frac{2}{x-2n+1} \right) \\ &= 2g(x) \end{aligned}$$

**3.a)** Soit  $N \in \mathbb{Z}^*$ , écrivons

$$D(x) = \pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x+N} - \frac{1}{x-N} - \frac{1}{x} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{+\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right).$$

on a au voisinage de  $N$

$$\cotan(\pi x) = \frac{1}{\pi(x-N)} + \frac{\pi}{3}(x-N) + o(x-N)$$

donc  $\cotan(\pi x) - \frac{1}{\pi(x-N)} \xrightarrow{x \rightarrow N} 0$ , de plus  $x \rightarrow \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$  est continue sur  $]N-1, N+1[$  (question **1.d**)

ainsi  $D$  se prolonge par continuité en  $N$ , et elle se prolonge une fonction  $\tilde{D}$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $\cotan(\pi x) - \frac{1}{\pi x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $x \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$  est continue sur  $] -1, 1[$  et vaut 0 pour  $x=0$ , ainsi  $\tilde{D}(0) = 0$ .

**3.b)**  $\tilde{D}$  est continue sur le compact  $[0, 1]$  donc elle est bornée et atteint ses bornes, ce qui justifie l'existence de  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $\tilde{D}(\alpha) = M = \sup_{t \in [0, 1]} \tilde{D}(t)$ .

D'après **2.a)** et **b)** on a  $D\left(\frac{x}{2}\right) + D\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2D(x)$  par suite  $\tilde{D}\left(\frac{x}{2}\right) + \tilde{D}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\tilde{D}(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

Donc

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2\tilde{D}(\alpha) = 2M$$

On a  $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq M$  et  $\tilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leq M$ , si  $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < M$  ou  $\tilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) < M$  alors  $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) < 2M$  ce qui est absurde donc  $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tilde{D}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = M$ , par récurrence on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$$

**4.**  $\tilde{D}$  est continue en 0 donc

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha}{2^n} \right) = 0$$

De même on a  $\exists \beta \in [0, 1]$  tel que  $\tilde{D}(\beta) = m = \inf_{t \in [0, 1]} \tilde{D}(t)$  et  $\tilde{D}\left(\frac{\beta}{2^n}\right) = m \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ; ainsi  $m = M = 0$ , par suite  $\tilde{D}$  est nulle sur  $[0, 1]$ , or  $\tilde{D}$  est 1 periodique donc elle est nulle sur  $\mathbb{R}$ , ainsi  $f = g$  et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \pi x \cotan(\pi x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}}$$

**5.a)** On écrit la formule précédente pour  $t \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$  et on fait le changement  $x = 2\pi t$  on obtient pour  $x \in ]-2\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$

$$\frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - (2\pi n)^2}$$

pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in ]-2\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$  on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 - (2\pi n)^2} &= \frac{-x^2}{(2\pi n)^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} \quad \left(\left|\frac{x}{2\pi n}\right| < 1\right) \end{aligned}$$

La famille  $\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{k \geq 1, n \geq 1}$  est évidemment sommable, donc

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} \\ &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in ]-2\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}, \quad \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}$$

**5.b)** La formule d'Euler donne pour  $x \in ]-2\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}$  :

$$\cotan\left(\frac{x}{2}\right) = i \frac{e^{ix} + 1}{e^{ix} - 1} = i - \frac{2i}{e^{ix} - 1}$$

d'où

$$\frac{ix}{e^{ix} - 1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k} \quad (1)$$

**6.** Écrivons (1) sous la forme

$$\forall x \in ]-2\pi, 2\pi[ \setminus \{0\}, \quad \frac{ix}{e^{ix} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot (ix)^n$$

la série  $\sum u_n z^n$  est de rayon de convergence  $R \geq 2\pi$ , et on a, par produit de Cauchy, pour tout  $|z| < 2\pi$ ,

$$(e^z - 1) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n \quad (2)$$

et pour  $x \in ]-2\pi, 2\pi[$  la relation (1) donne,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n i^n x^n = ix$$

par unicité des coefficients du DSE on a :

$$w_1 = 1 \text{ et } w_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

ce qui donne pour tout  $|z| < 2\pi$ ,

$$(e^z - 1) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right) = z$$

**7.a)** D'après la question précédente :

$$\forall x \in ]-2\pi, 2\pi[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$$

$h$  est DSE en 0 de rayon  $R \geq 2\pi$ , donc elle est de classe  $C^\infty$  sur  $]-2\pi, 2\pi[$ , et elle est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus ]-2\pi, 2\pi[$ , comme produit de fonctions de classe  $C^\infty$ , donc  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , de plus on a

$$n! u_n = h^{(n)}(0)$$

ce qui donne

$$h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}} \zeta(2n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**7.b)** Reprenons la formule (2) de la question 6), pour tout  $|z| < 2\pi$

$$z = (e^z - 1) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n$$

on a  $b_n = h^{(n)}(0) = n!u_n$ . Posons  $e^z - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  avec  $a_0 = 0$  et  $a_n = \frac{1}{n!}$ , ce qui donne

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} a_{n-k}$$

donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Les  $b_n$  sont appelés les nombres de Bernoulli .

**7.c)** On a

$$\zeta(2n) = b_{2n} \frac{(-1)^{n-1} \pi^{2n} 2^{2n-1}}{(2n)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si  $n = 2$  alors  $\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = 0$  et  $b_2 = \frac{1}{6}$  .

Donc  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  .

De même on a :  $b_4 = \frac{-1}{30}$  ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  et  $b_6 = \frac{1}{42}$  ,  $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$  .

## Deuxième partie

**8.a)** Soit  $\mu \in \mathcal{M}(E)$ ,  $\mu$  est une probabilité sur  $E$  pour la tribu  $\mathcal{P}(E)$ , donc  $\mu(\mathcal{P}(E)) \subset [0,1]$  et  $\mathcal{M}(E)$  est une partie de  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$ .

**8.b)** Soit  $f, g \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$ ,  $\|f\| = \sup\{|f(A)|, A \in \mathcal{P}(E)\}$ .

- $\|f\| \geq 0$  .
- Si  $\|f\| = 0$  , pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$  on a  $0 \leq |f(A)| \leq \|f\|$ , donc  $f(A) = 0$  , ains  $f = 0$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  , pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$  on a  $|\lambda f(A)| \leq |\lambda| \|f\|$  donc  $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$  (\*).  
Si  $\lambda \neq 0$  , on a  $\|f\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\|$  , l'inégalité (\*) donne  $\|f\| = |\frac{1}{\lambda}| \|\lambda f\|$  , d'où  $|\lambda| \|f\| \leq \|\lambda f\|$  , c'est aussi valable pour  $\lambda = 0$ , aissi  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$  .
- Pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$   $|f(A) + g(A)| \leq |f(A)| + |g(A)| \leq \|f\| + \|g\|$ , ce qui donne  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .  
Ainsi  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$ .

**9.** Soient  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{M}(E)$  qui converge vers  $\mu$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$ .

Soit  $x \in E$  , on a

$$|\mu_n(x) - \mu(x)| \leq \|\mu_n - \mu\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(x) = \mu(x)$  .

**10.a)** Posons pour tout  $n \geq 1$  ,  $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ,  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite croissante de réunion  $E$  , le théorème de la limite monotone donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 1$$

la suite  $(\mu(A_n))$  est croissante donc il existe  $N \geq 1$  tel que , pour tout  $n \geq N$  ,  $\mu(A_n) \geq 1 - \varepsilon$  .  
 Soit  $k \geq N$  , on a  $\forall x \in A_k$  ,  $\mu_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu(x)$  donc

$$\exists N_x \geq 1 , n \geq N_x \Rightarrow |\mu_n(x) - \mu(x)| < \frac{\varepsilon}{\text{Card}(A_k)}$$

aissi

$$n \geq \max_{x \in A_k} N_x \Rightarrow \sum_{x \in A_k} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon.$$

On prend  $F_\varepsilon = A_k$  et  $N_\varepsilon = \max_{x \in A_k} N_x$  , on a  $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  et pour tout entier  $n \geq N_\varepsilon$  on a

$$\sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon$$

**10.b)** Soit  $A$  une partie de  $E$  , on a

$$\begin{aligned} |\mu_n(A) - \mu(A)| &= |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) + \mu_n(A \cap (E \setminus F_\varepsilon)) - \mu(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap (E \setminus F_\varepsilon))| \\ &\leq |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| + \mu_n(A \cap (E \setminus F_\varepsilon)) + \mu(A \cap (E \setminus F_\varepsilon)) \\ &\leq \underbrace{|\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)|}_{(1)} + \underbrace{\mu(E \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(E \setminus F_\varepsilon)}_{(2)} \quad (\text{car } A \cap (E \setminus F_\varepsilon) \subset E \setminus F_\varepsilon) \end{aligned}$$

On a pour  $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} (1) \quad |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| &= \left| \sum_{x \in A \cap F_\varepsilon} \mu_n(x) - \sum_{x \in A \cap F_\varepsilon} \mu(x) \right| \\ &\leq \sum_{x \in A \cap F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \\ &\leq \sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

De plus

$$(2) \quad \mu(E \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(E \setminus F_\varepsilon) \leq 2\mu(E \setminus F_\varepsilon) + |\mu_n(E \setminus F_\varepsilon) - \mu(E \setminus F_\varepsilon)|$$

et

$$\begin{aligned} |\mu_n(E \setminus F_\varepsilon) - \mu(E \setminus F_\varepsilon)| &= |\mu_n(F_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon)| \\ &\leq \sum_{x \in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Comme  $\mu(F_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  alors  $\mu(E \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$  et

$$(2) \quad \mu(E \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(E \setminus F_\varepsilon) \leq 3\varepsilon$$

Ainsi pour tout  $n \geq N_\varepsilon$  ,  $|\mu_n(A) - \mu(A)| < 4\varepsilon$

**10.c)** Conséquence des questions **9)** , **10.a)** et **10.b)** .

**11.** Si  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une probabilité  $\delta$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$  , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $(\delta_k(\{x_n\}))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\delta(\{x_n\})$  . On a  $\delta_k(\{x_n\}) = 0$  pour tout  $k > n$  , donc  $\delta(\{x_n\}) = 0$  , ainsi  $\delta = 0$  ce qui est absurde car  $\delta(E) = 1$  . Donc  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$  .

**12.a)** On utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass et une récurrence :

- La suite  $(\mu_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathbb{R}$  , donc on peut en extraire une sous suite convergente  $(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$  , la suite  $(\mu_{\varphi_1(n)}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi bornée dans  $\mathbb{R}$  , donc on peut en extraire une sous suite  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$  convergente , de plus  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la même limite que la suite  $(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$  .

- Soit  $m \geq 2$ , supposons qu'on a construit  $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq m}$  des applications strictement croissantes de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$  telles que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout entier  $1 \leq i \leq m$ , la suite  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_m(n)}(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.  
La suite  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_m(n)}(x_{m+1}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ , donc on peut en extraire une sous suite convergente  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_m \circ \varphi_{m+1}(n)}(x_{m+1}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , de plus les suites  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_m \circ \varphi_{m+1}(n)}(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent pour tout  $1 \leq i \leq m$ .

D'où le résultat .

**12.b)** Soit  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $h > k \geq i$ , la suite  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_h(n)}(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une sous suite de  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , elles sont convergentes, donc elles ont la même limite, ainsi cette limite commune ne dépend que de  $i$  et pas de  $k$ , elle est notée  $\mu_\infty(x_i)$ .

**12.c)** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  l'application  $\varphi_k$  est strictement croissante et  $\varphi_k(n) \geq n \quad \forall n$ , donc  $\varphi_{k+1}(k+1) > k$  et

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_{k+1}(k+1) > \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(k)$$

ainsi  $\psi$  est strictement croissante.

On a pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $k \geq i$  la suite  $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\mu_\infty(x_i)$ , donc

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, n \geq N \Rightarrow |\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| < \varepsilon, \forall k \geq i,$$

ce qui donne

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon, n \geq N \Rightarrow \sup_{k \geq i} |\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\sup_{k \geq i} |\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

c'est une convergence uniforme pour  $k \geq i$ .

Pour  $n$  assez grand on a

$$|\mu_{\psi(n)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| \leq \sup_{k \geq i} |\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)|$$

donc  $\boxed{(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_\infty(x_i)}$ .

**12.d)** Soit  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'éléments de  $[0, 1]$ , qui est fermé, donc  $\mu_\infty(x_i) \in [0, 1]$ .

Pour tout  $k$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on a

$$\sum_{i=1}^n \mu_{\psi(k)}(x_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\psi(k)}(x_i) = 1$$

par passage à la limite sur  $k$  on obtient

$$\sum_{i=1}^n \mu_\infty(x_i) \leq 1$$

comme  $\mu_\infty(x_i) \geq 0$  alors la série  $\sum_{i \geq 1} \mu_\infty(x_i)$  converge et  $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_\infty(x_i) \leq 1}$ .

**12.e)** Soit  $\varepsilon > 0$  et  $F_\varepsilon$  partie finie de  $E$  telle que

$$1 - \varepsilon \leq \mu_n(F_\varepsilon) = \sum_{x \in F_\varepsilon} \mu_n(x) \quad \forall n \geq 1$$

par passage à la limite sur  $n$  on obtient  $1 - \varepsilon \leq \sum_{x \in F_\varepsilon} \mu_\infty(x)$ , par suite

$$1 - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_\infty(x_i) \leq 1$$

ceci etant pour tout  $\varepsilon > 0$  donc  $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu_\infty(x_i) = 1}$ .

Ainsi la famille  $(\mu_\infty(x_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$  définit une unique probabilité,  $\mu_\infty$ , par si  $A \subset E$  alors  $\mu_\infty(A) = \sum_{x \in A} \mu_\infty(x)$ .

Nous avons  $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\mu_\infty(x_i)$  pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}^*$ , d'après la question **10)**  $(\mu_{\psi(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge

vers  $\mu_\infty$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbb{R})$ , ainsi  $\mu_\infty$  est une valeur d'adhérence de  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Troisième partie

**13** On a

$$\mu_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = 1.$$

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles de  $X(\Omega)$ . Les événements  $([X \in A_n])_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X \in A_n] = \left[ X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right]$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \mu_X \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \mathbb{P} \left( X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X \in A_n] \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_X(A_n) \end{aligned}$$

Ainsi  $\mu_X$  est une probabilité sur  $E$ .

**14** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $A$  une partie de  $E$  :

$$\begin{aligned} |\mu_X(A) - \mu_Y(A)| &= |\mathbb{P}(\{X \in A\}) - \mathbb{P}(\{Y \in A\})| \\ &= |\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X \in A\}} = 1) - \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{Y \in A\}} = 1)| \\ &= |\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \in A\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y \in A\}})| \quad (\mathbb{1}_{\{X \in A\}}(\Omega) = \{0, 1\}) \\ &= |\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}})| \\ &\leq \mathbb{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|) \end{aligned}$$

$|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|$  prend les valeurs 0 ou 1, avec  $[|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}| = 1] = [X \neq Y]$  et  $[|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}| = 0] = [X = Y]$  donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}|) &= \mathbb{P}(|\mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y \in A\}}| = 1) \\ &= \mathbb{P}(X \neq Y) \end{aligned}$$

Ainsi

$$|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

donc  $\mu_X - \mu_Y$  est bornée et  $\|\mu_X - \mu_Y\| \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$ .

**15.a)** Soit  $\omega \in \Omega$ , on a  $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire et converge vers  $X(\omega)$ , donc  $\{n \in \mathbb{N}, X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$  est fini et  $\max\{n \in \mathbb{N}, X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$  existe, d'où  $L$  est bien définie.

**15.b)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$[L \geq n] = \{\omega \in \Omega, X_k(\omega) \neq X(\omega) \quad \forall k \leq n\}$$

donc  $[X_n \neq X] \subset [L \geq n]$  par suite  $\mathbb{P}(X_n \neq X) \leq \mathbb{P}(L \geq n)$ .

**15.c)** D'après la question **14)** on a  $\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leq \mathbb{P}(X_n \neq X)$  donc  $\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leq \mathbb{P}(L \geq n)$ .

Remarquons que  $\bigcup_{n \geq 1} [L < n] = \Omega$  et  $([L < n])_{n \geq 1}$  est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(L < n) = 1$ , par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(L \geq n) = 0$  ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{X_n} - \mu_X\| = 0$ , c.a.d  $\mu_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_X$ .

16. Soit  $\omega \in \Omega$ , la suite  $(\psi_n(X(\omega)))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est stationnaire, car  $\nu_{p_i}(X(\omega))$  est nulle à partir d'un certain rang, donc  $\psi_n(X(\omega)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(\omega)$ , de la question 15 (appliquée à la suite  $(\psi_n(X))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ) on a  $\mu_{\psi_n(X)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu_X$ , ce qui se traduit par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\psi_n(X) = x)}$$

## Quatrième partie

17. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux probabilités sur  $\mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\forall r \in \mathbb{N}^*, \mu_1(\mathbb{N}^*r) = \mu_2(\mathbb{N}^*r)$ .

17.a) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $n \geq 1$ , on a

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i = \left( \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) \cup \mathbb{N}^*rp_{n+1}$$

et

$$\mathbb{N}^*rp_{n+1} = \left( \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \right) \cup \left( \mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \right)$$

puisque

$$\bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \subset \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i$$

alors

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i = \left( \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) \cup \left( \mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \right) \quad (*)$$

17.b) On suppose que  $\forall r \in \mathbb{N}^*, \mu_1(\mathbb{N}^*r) = \mu_2(\mathbb{N}^*r)$

Montrons par récurrence sur  $n$  que pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) = \mu_2 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right)$$

Pour  $n = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbb{N}^*r \setminus \mathbb{N}^*rp_1) &= \mu_1(\mathbb{N}^*r) - \mu_1(\mathbb{N}^*rp_1) \\ &= \mu_2(\mathbb{N}^*r) - \mu_2(\mathbb{N}^*rp_1) \\ &= \mu_2(\mathbb{N}^*r \setminus \mathbb{N}^*rp_1) \end{aligned}$$

Supposons la relation vraie pour  $n$  et pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , on a alors

$$\mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i \right) = \mu_1(\mathbb{N}^*r) - \mu_1 \left( \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i \right)$$

la réunion de la relation (\*) est disjointe donc

$$\begin{aligned} \mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i \right) &= \mu_1(\mathbb{N}^*r) - \mu_1 \left( \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) + \mu_1 \left( \mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \right) \\ &= \mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) + \mu_1 \left( \mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \right) \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned} \mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i \right) &= \mu_2 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) + \mu_2 \left( \mathbb{N}^*rp_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_{n+1}p_i \right) \\ &= \mu_2 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^*rp_i \right) \end{aligned}$$

D'où le resultat pour tout  $n$  et  $r$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

**17.c)** Soit  $n$  et  $r$  dans  $\mathbb{N}^*$ . La suite  $\left( \mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{N}^*rp_i \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante minorée donc elle converge, de limite  $\mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^*rp_i \right)$ . On a alors

$$\mu_1 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^*rp_i \right) = \mu_2 \left( \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^*rp_i \right)$$

Si  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^*rp_i$  alors  $a = k.r$  et  $p_i \nmid k$  pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}^*$ , forcément  $k = 1$  et  $a = r$ , donc

$$\mathbb{N}^*r \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{N}^*rp_i = \{r\}$$

Ainsi  $\forall r \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu_1(\{r\}) = \mu_2(\{r\})$  d'où  $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$ .

**18.** La relation ii) s'écrit, pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in \mathbb{N}^*r) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}^*r)$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{X_n}(\mathbb{N}^*r) = \mu_X(\mathbb{N}^*r).$$

La suite  $(\mu_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est tendue, d'après **12.e)** il existe  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(\mu_{X_{\psi(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$  converge, dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{R})$ , vers une probabilité  $\mu_{X_\infty}$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  on a  $|\mu_{X_{\psi(n)}}(\mathbb{N}^*r) - \mu_{X_\infty}(\mathbb{N}^*r)| \leq \|\mu_{X_{\psi(n)}} - \mu_{X_\infty}\|$  donc  $\mu_{X_{\psi(n)}}(\mathbb{N}^*r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_{X_\infty}(\mathbb{N}^*r)$ , de plus

$$\mu_{X_{\psi(n)}}(\mathbb{N}^*r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{X_n}(\mathbb{N}^*r) = \mu_X(\mathbb{N}^*r)$$

alors  $\mu_X(\mathbb{N}^*r) = \mu_{X_\infty}(\mathbb{N}^*r)$ , d'après la question **17)** on a  $\mu_X = \mu_{X_\infty}$ .

Ce qui prouve que  $\mu_X$  est l'unique valeur d'adhérence de  $(\mu_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , de plus  $(\mu_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée donc elle converge vers  $\mu_X$ .

(c'est un exercice classique : toute suite réelle bornée qui admet une unique valeur d'adhérence  $l$ , converge vers  $l$ ).

**19.** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , on a

$$\left[ r \mid X_n^{(i)} \right] = \bigcup_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \left[ X_n^{(i)} = k.r \right] \quad (\text{réunion disjointe})$$

donc

$$\mathbb{P} \left( r \mid X_n^{(i)} \right) = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \leq \frac{1}{r}$$

On a

$$\begin{aligned} \left[ r \mid Z_n^{(s)} \right] &= \bigcap_{1 \leq i \leq s} \left[ r \mid X_n^{(i)} \right] \\ &= \bigcup_{(k_1, \dots, k_s) \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \rrbracket} \left( \bigcap_{1 \leq i \leq s} \left[ X_n^{(i)} = rk_i \right] \right) \quad (\text{réunion disjointe}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( r \mid Z_n^{(s)} \right) &= \sum_{(k_1, \dots, k_s) \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \rrbracket} \mathbb{P} \left( \bigcap_{1 \leq i \leq s} \left[ r \mid X_n^{(i)} \right] \right) \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_s) \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \rrbracket} \prod_{1 \leq i \leq s} \mathbb{P} \left( r \mid X_n^{(i)} \right) \quad (\text{indépendance des } X_n^{(i)}) \\ &= \left( \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \right)^s \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(r | Z_n^{(s)}) = \frac{1}{r^s}}$$

**20.a)** Soit  $s > 1$  et  $Z$  une v.a.r telle que  $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on a .

$$[k | Z] = \bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} [Z = k.h] \quad (\text{réunion disjointe})$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k | Z) &= \sum_{h \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(Z = k.h) \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\zeta(s)(k.h)^s} \\ &= \frac{1}{k^s} \end{aligned}$$

**20.b)** Soit  $s \geq 2$  un entier. On utilise la question **18)**, les questions **19)** et **20.a)** donnent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(r | Z_n^{(s)}) = \frac{1}{r^s} = \mathbb{P}(r | Z).$$

Vérifions que  $(\mu_{Z_n^{(s)}})_{n \in \mathbb{N}}$  est tendue .

On a  $\mathbb{P}(Z_n^{(s)} = k) \leq \mathbb{P}(k | Z_n^{(s)}) \leq \frac{1}{k^s}$  donc

$$\sum_{k \geq n+1} \mathbb{P}(Z_n^{(s)} = k) \leq \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $N$  tel que , si  $n \geq N$  alors  $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^s} < \varepsilon$ , on en déduit que

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(Z_n^{(s)} = k) = \mu_{Z_n^{(s)}}(\{1, \dots, n\}) \geq 1 - \varepsilon$$

D'après la question **18)** la suite  $(\mu_{Z_n^{(s)}})_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{R})$  vers  $Z$  et donc vers  $\mu_s$  ( car  $\mu_s$  et  $Z$  sont de même loi).

**21.** Soit  $s, n \in \mathbb{N}^*$  avec  $2 \leq s \leq n$ . Les variables  $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(s)}$  sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  et  $Z_n^{(s)} = X_n^{(1)} \wedge \dots \wedge X_n^{(s)}$ . Donc

$$\mathbb{P}_n(s) = \mathbb{P}(Z_n^{(s)} = 1) = \mu_{Z_n^{(s)}}(1)$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_n(s) = \mu_s(1) = \frac{1}{\zeta(s)}}$$

La question **7.c)** donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_n(2) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.60793, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_n(4) = \frac{90}{\pi^4} \approx 0.92394 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_n(6) = \frac{945}{\pi^6} \approx 0.98295.}$$