

Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Contrôle à posteriori de l'épreuve

Banque PT: MATHS II-A.

Premier exercice.

1°) Soit à calculer $I(x) = \int_0^x \text{Arc tan}(2t) dt$. Effectuons une intégration par parties en posant:

$$\begin{cases} u = \text{Arc tan}(2t) \\ v' = 1 \end{cases} \quad \text{on a} \quad \begin{cases} u' = \frac{2}{1+4t^2} \\ v = t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad I(x) = t \text{Arc tan}(2t) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+4t^2} dt \quad \text{soit enfin:}$$

$$I(x) = x \text{Arc tan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) \Big|_0^x$$

conclusion $\int_0^x \text{Arc tan}(2t) dt = x \text{Arc tan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2).$

2°) La formule des accroissements finis donne:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists \theta(x) \in]0,1[; \sin x - \sin 0 = x \cos(x\theta(x)) \quad \text{d'où} \quad |\sin x| = |x \cos(x\theta(x))| \leq |x|.$$

conclusion $\forall x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq |x|.$

3°) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

- Domaine de définition:

$$\forall x \in \mathbf{R}, t \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} \text{ est continue sur } [0, +\infty[, (\text{prolongement par continuité en } 0 \text{ par } x^2)$$

elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème d'intégrale généralisée est

$$\text{donc en } +\infty. \text{ Or, au voisinage de } +\infty, \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} \leq e^{-t} \text{ et } \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-1} \text{ est convergente.}$$

Le théorème de comparaison pour les fonctions positives assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt.$$

conclusion $\text{Def}(f) = \mathbf{R}$ et f est une fonction paire.

- Continuité:

$$\text{Soit } h(x,t) = \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t}. \quad h \text{ est continue sur } \mathbf{R} \times [0, +\infty[. \text{ On va alors écrire :}$$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt = f_1(x) + f_2(x).$$

- Le théorème simple concernant la continuité d'une intégrale au sens de Riemann dépendant d'un paramètre s appliqué sur $\mathbf{R} \times [0,1]$, f_1 est continue sur $\mathbf{R}$.

- Sur $\mathbf{R} \times [1, +\infty[$, $|h(x, t)| \leq e^{-t}$, fonction indépendante de x , continue sur $[1, +\infty[$ et telle que $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-1}$ est convergente. Le théorème de continuité d' une intégrale généralisée dépendant d' un paramètre s' appliqué₂ est continue sur $\mathbf{R}$.

conclusion f est continue sur $\mathbf{R}$.

• Dérivabilité:

$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$, (prolongement par continuité en un point $(x, 0)$ par $2x$)

- Le théorème simple concernant la dérivabilité d' une intégrale au sens de Riemann dépendant d' un paramètre s' appliqué sur $\mathbf{R} \times [0, 1[$, f_1 est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_1'(x) = \int_0^1 \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt.$$

- Sur $\mathbf{R} \times [1, +\infty[$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$, fonction indépendante de x , continue sur $[1, +\infty[$ et telle que $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-1}$ est convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale généralisée dépendant d' un paramètre s' appliqué₂ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_2'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt.$$

conclusion f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt$.

• Dérivée seconde:

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 2 \cos(2xt) e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$. On peut cette fois conclure directement:

Sur $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-t}$, fonction indépendante de x , continue sur $[0, +\infty[$ et telle

que $\int_0^{+\infty} 2e^{-t} dt = 2$ est convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale généralisée dépendant d' un paramètre s' appliqué₂ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) = \int_0^{+\infty} 2 \cos(2xt) e^{-t} dt.$$

conclusion f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, et $\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) = \int_0^{+\infty} 2 \cos(2xt) e^{-t} dt$.

NB: Je n' ai pas vu l' intérêt de faire prouver le caractère² de f sur $] -a, a[$, puisque on peut l' obtenir directement le résultat sur $\mathbf{R}$.

4°) Calcul de $f''(x)$.

Une primitive de $2 \cos(2xt) e^{-t}$ est de la forme $A = e^{-t} [a \cos(2xt) + b \sin(2xt)]$. On a:

$A' = e^{-t} [(-a + 2xb) \cos(2xt) + (-2ax - b) \sin(2xt)]$ ce qui conduit au système:

$$\begin{cases} -a + 2xb = 2 \\ -2xa - b = 0 \end{cases} \quad \text{d' où } a = -\frac{2}{1+4x^2}, \quad b = \frac{4x}{1+4x^2} \quad \text{et par suite :}$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+4x^2} [-\cos(2xt) + 2x \sin(2xt)] e^{-t} \Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}$$

$$\textbf{conclusion} \quad f''(x) = \frac{2}{1+4x^2}.$$

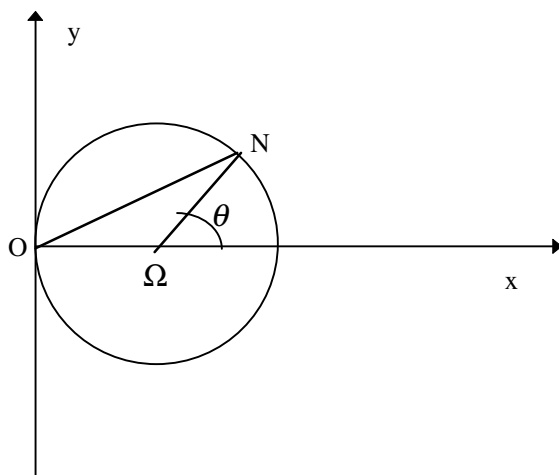
5°) Comme $f'(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1+4t^2} dt = \text{Arc tan}(2x).$

Comme $f(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^x \text{Arc tan}(2t) dt$ et donc :

$$\textbf{conclusion} \quad f(x) = x \text{Arc tan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2).$$

Deuxième exercice.

1°) Le point N est défini par $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}$.



2°) Les coordonnées de N sont: $x = 1 + \cos \theta$, $y = \sin \theta$.

La hauteur issue de N a pour équation: $x = 1 + \cos \theta$.

La hauteur issue de Ω a pour équation $(1 + \cos \theta)(x - 1) + y \sin \theta = 0$.

L' orthocentre H du triangle ΩN a donc pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_H = 1 + \cos \theta \\ y_H = -\frac{\cos \theta (1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \end{cases} \quad \theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}.$$

Rq: Quand $\theta \rightarrow \pm\pi$ $H \rightarrow 0$.

Quand $\theta \rightarrow 0$ $x_H \rightarrow 2$ $y_H \rightarrow \pm\infty$, il y a asymptote d' équation $x = 2$.

Si on prend pour nouveau paramètre $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, $t \in \mathbf{R}^*$ les coordonnées de H deviennent:

$$\begin{cases} x_H = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y_H = -\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}{\frac{2t}{1+t^2}} \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}^* \quad \text{soit : } (\Gamma) : \begin{cases} x = \frac{2}{t^2+1} \\ y = \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}^*$$

Rq: En reprenant le paramétrage en θ , on a
$$\begin{cases} x-1 = \frac{\cos \theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ y = -\frac{\cos \theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{\theta}{2}) \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x-1 = \frac{\cos \theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \\ y = \frac{\cos \theta}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

Dès lors, en prenant des coordonnées polaires de centre Ω , avec $\omega = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$, l'équation polaire de Γ est:

$$\rho = -\frac{\cos(2\omega)}{\cos \omega} \text{ et on reconnaît la \underline{strophoïde}.}$$

3°) Equation de la droite Δ_t passant par les points $M_1(t)$ et $M_2(\frac{1}{t})$.

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{pmatrix} \frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \\ \frac{t^2(1-t^2)+1-t^2}{t(t^2+1)} \end{pmatrix} \text{ est parallèle à } \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{t^2+1}{-1} \\ t \end{pmatrix}$$

(le cas $t = \pm 1$ qui correspond à $M_1 = M_2 = \Omega$ étant à exclure, car alors la droite $M_1 M_2$ n'est pas définie).

Equation de la droite Δ_t : $\frac{1}{t}(x - \frac{2}{t^2+1}) + \frac{2}{t^2+1}(y - \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}) = 0$ soit sous une autre forme:

$$\Delta_t: x + \frac{2t}{t^2+1} - \left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 = 0.$$

On voit que le bon paramètre pour étudier l'enveloppe de la famille des Δ_t est $u = \frac{2t}{t^2+1} = \sin \theta$

et par suite avec $u \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. On a alors $\Delta_u: u^2 - uy - x = 0$, et la résolution du système $\begin{cases} \Delta_u \\ \Delta'_u \end{cases}$

revient à écrire que l'équation du deuxième degré en u a une racine double.

L'enveloppe est donc incluse dans la parabole d'équation $y^2 + 4x = 0$.

Plus précisément, on a: $\Delta'_u: 2u - y = 0$ et donc le paramétrage de l'enveloppe est:

$$(E): \begin{cases} x = -u^2 \\ y = 2u \end{cases} \quad u \in]-1, 1[\setminus \{0\}$$

conclusion (E) est la partie de la parabole d'équation $y^2 = -4x$ $-2 < y < 2$ $y \neq 0$.

4°) Intersection de la droite $y = ax$ avec (Γ) .

L' équation aux t des points d' intersection est : $\frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} = a \frac{2}{t^2 + 1}$ soit : $t^2 - 2at - 1 = 0$.

- On ne retrouve pas l' origine au moyen de cette relation car 0 est obtenu pour $t \rightarrow \pm\infty$.
- L' équation est du deuxième degré avec $\Delta' = a^2 + 1 > 0$. Elle admet donc toujours deux racines t_1 et t_2 distinctes.

Lorsque $a \neq 0$, t_1 et t_2 sont différents de ± 1 et les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont distincts.

Lorsque $a = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont confondus avec Ω .

Le point P a pour coordonnées $(1, a)$.

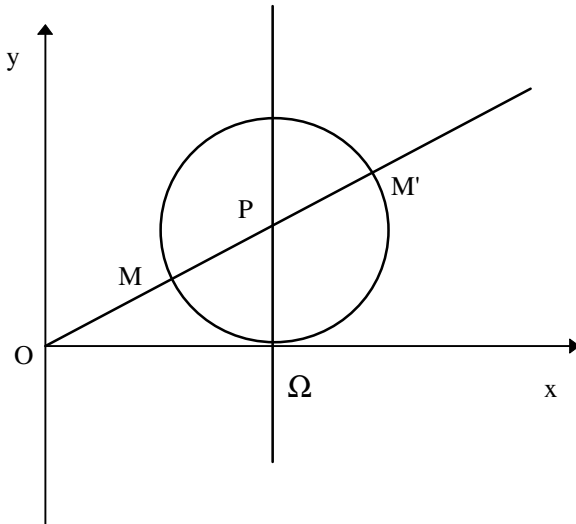
On a $\overrightarrow{P\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ d' où $\|\overrightarrow{P\Omega}\|^2 = a^2$.

$\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PM'}$ ont pour composantes $\begin{pmatrix} \frac{2}{t^2 + 1} - 1 \\ \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{at + 1} - 1 \\ \frac{a}{at + 1} - a \end{pmatrix}$ puisque $t^2 - 2at - 1 = 0$.

soit encore: $\frac{1}{at + 1} \begin{pmatrix} -at \\ -a^2t \end{pmatrix}$ de sorte que $\|\overrightarrow{PM}\|^2 = \|\overrightarrow{PM'}\|^2 = a^2$

conclusion $\|\overrightarrow{PM}\| = \|\overrightarrow{PM'}\| = \|\overrightarrow{P\Omega}\| = |a|$.

D' où une construction géométrique des points de (Γ) .



Troisième exercice.

1°) Soit $(S): x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 2$; $(P_\lambda): z = \lambda y + 1$; $(C_\lambda) = (S) \cap (P_\lambda)$.

(S) est une quadrique qui, quand on l'a coupe par des plans:

$x = Cte$ fournit des hyperboles.

$y = Cte$ ellipses.

$z = Cte$ hyperboles.

(S) est un hyperboloïde à une nappe. Il n'est pas de révolution car dans son équation "quasi réduite", les

coefficients de x^2 et z^2 sont distincts.

2°) L'aire du domaine intérieur à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ est :

$A = \iint_D dx dz$, $D = \left\{ (x, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. On fait le changement de variables classique:

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = b\rho \sin \theta & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \quad Jac = ab\rho . \quad \text{On a alors: } A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab\rho \, d\rho \, d\theta . \text{ On intègre}$$

sur un pavé une fonction, produit d'une fonction constante $d\theta$ par une fonction de ρ .

L'intégrale se transforme en un produit de deux intégrales simples.

conclusion $A = ab \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 \rho \, d\rho = \pi ab .$

Le volume demandé s'obtient en intégrant $d\theta$ à 1 l'aire de la section d'indice de (S) .

La section (S_y) de (S) par le plan parallèle à Oxz d'ordonnée y est l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{2(1+y^2)} + \frac{z^2}{1+y^2} = 1 , \text{ dont l'aire est } \pi\sqrt{2}(1+y^2) \text{ et ainsi } V = \int_0^1 \pi\sqrt{2}(1+y^2) \, dy = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} .$$

conclusion $V = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} .$

3°) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé. $(C_\lambda): \begin{cases} z = \lambda y + 1 \\ x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$. L'équation de la projection orthogonale de

(C_λ) sur Oxy s'obtient en éliminant z entre les deux équations. On obtient:

$$x^2 - 2y^2 + 2(\lambda y + 1)^2 - 2 = 0 \quad \text{soit : } x^2 + 2(\lambda^2 - 1)y^2 + 4\lambda y = 0 .$$

Il s'agit de l'équation d'une conique dont la nature est donnée par le signe $\lambda^2 - 1$.

conclusion $\begin{cases} |\lambda| > 1 & \text{il s'agit d'une ellipse} \\ |\lambda| = 1 & \text{il s'agit d'une parabole} \\ |\lambda| < 1 & \text{il s'agit d'une hyperbole} \end{cases}$

Etude des cas demandés:

- $\lambda = 0$; $x^2 - 2y^2 = 0$ la projection est alors la réunion des deux droites d'équations $x = \pm\sqrt{2}y$.
(on est cependant dans le cas type hyperbole)

$$\bullet \lambda = \frac{1}{2}; x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 2y = 0 \text{ soit } x^2 - \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = 0 \text{ soit enfin } \frac{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1.$$

C' est l'équation réduite d'une hyperbole.

$\bullet \lambda = 1; x^2 + 4y = 0$ la projection est alors une parabole.

$$\bullet \lambda = 2; x^2 + 6y^2 + 8y = 0 \text{ soit } x^2 + 6\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} = 0 \text{ soit enfin } \frac{\left(y + \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1.$$

C' est l'équation réduite d'une ellipse.

Ceci permet de déduire la nature de (C_λ) que l'on peut interpréter comme l'intersection du cylindre de génératrices parallèles à Oz et de base les coniques précédentes, avec le plan (P_λ) . Les (C_λ) sont de même nature que ces coniques.

conclusion (C_0) est constituée des deux droites $\begin{cases} z = 1 \\ x = \sqrt{2}y \end{cases}$ et $\begin{cases} z = 1 \\ x = -\sqrt{2}y \end{cases}$ et pour le reste:

$$\begin{cases} |\lambda| > 1 & (C_\lambda) \text{ est une ellipse} \\ |\lambda| = 1 & (C_\lambda) \text{ est une parabole} \\ |\lambda| < 1 & (C_\lambda) \text{ est une hyperbole} \end{cases}$$

(C_λ) peut-elle être un cercle?

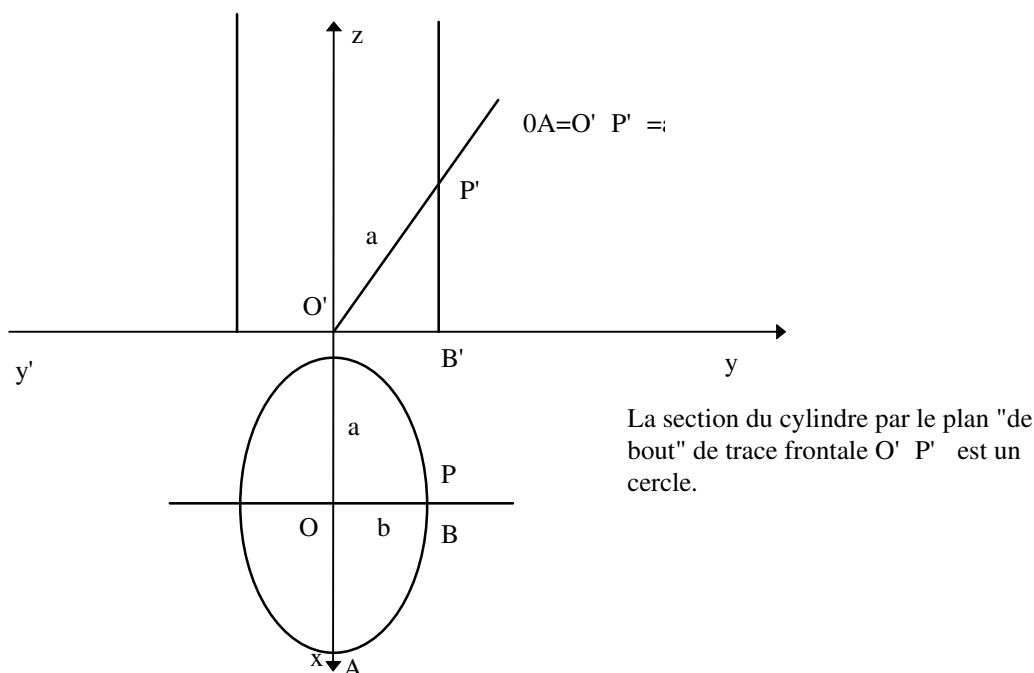
A priori, il n'est pas impossible que (C_λ) soit un cercle. Si c'est le cas ce sera pour des valeurs de λ de module strictement plus grand que 1. Mais ceci semble être l'objet de la dernière question.

Rq: Sur un cylindre ayant une base elliptique, il existe toujours des sections qui sont des cercles. En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer que le cylindre a ses génératrices parallèles

à Oz et a pour base l'ellipse du plan $z = 0$, d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$.

Alors, la section du cylindre par un plan "de bout" d'équation $z = my$ est une ellipse dont l'un des axes est porté par Ox et a pour demi longueur a , et dont l'autre est porté par l'intersection des plans $x = 0$ et $z = my$ et a pour demi longueur $b\sqrt{1+m^2}$.

On aura donc un cercle lorsque $a = b\sqrt{1+m^2}$ soit $m = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. On peut donc prendre par exemple $m =$ excentricité de l'ellipse de base.



4°) Un vecteur orthogonal au plan (P_λ) est $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$. On choisira par exemple $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$. On

peut alors prendre $\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$, d'où la matrice de passage suivante:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ 0 & -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \text{ et les formules de passage: } \begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} (-Y + \lambda Z) \\ z = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} (-\lambda Y - Z) \end{cases}$$

L' équation de (S) dans ce nouveau repère est :

$$X^2 - \frac{2}{\lambda^2 + 1} (-Y + \lambda Z)^2 + \frac{2}{\lambda^2 + 1} (\lambda Y + Z)^2 - 2 = 0 \quad \text{soit :}$$

conclusion Dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ $(S): X^2 + 2 \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} (Y^2 - Z^2) + 8 \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} YZ - 2 = 0.$

L' équation de (P_λ) dans le nouveau repère est : $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} (-\lambda Y - Z) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} (-Y + \lambda Z) + 1$
soit: $Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$

(C_λ) est alors définie dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ par :

$$\begin{cases} Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \\ X^2 + 2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}Y^2 - 8\frac{\lambda}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{\lambda^2 + 1}} - 2 - 2\frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1)^2} = 0 \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \\ X^2 + 2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\left(Y - \frac{2\lambda}{(\lambda^2 - 1)\sqrt{\lambda^2 + 1}}\right)^2 = K \end{cases} \text{ avec } K = \frac{[2(\lambda^2 + 1)^2 + 2(\lambda^2 - 1)](\lambda^2 - 1) + 8\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)^2}$$

soit encore $K = \frac{2\lambda^6 + 4\lambda^4 + 2\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)^2} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$.

conclusion Dans $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, (C_λ) :

$$\begin{cases} Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \\ X^2 + 2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\left(Y - \frac{2\lambda}{(\lambda^2 - 1)\sqrt{\lambda^2 + 1}}\right)^2 = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \end{cases}$$

Ce sera un cercle si $2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} = 1$ soit $\lambda^2 - 3 = 0$. Il y a donc deux valeurs possibles de λ . D'où :

• $(C_{\sqrt{3}})$: $\begin{cases} Z = -\frac{1}{2} \\ X^2 + (Y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 \end{cases}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ associé à $\lambda = \sqrt{3}$ et dans le repère

fixe d'origine $(C_{\sqrt{3}})$: $\begin{cases} z = \sqrt{3}y + 1 \\ x^2 + 4y^2 + 4\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ rayon $R = \sqrt{3}$, centre $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

• $(C_{-\sqrt{3}})$: $\begin{cases} Z = -\frac{1}{2} \\ X^2 + (Y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 \end{cases}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ associé à $\lambda = -\sqrt{3}$ et dans le repère

fixe d'origine $(C_{-\sqrt{3}})$: $\begin{cases} z = -\sqrt{3}y + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ rayon $R = \sqrt{3}$, centre $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

Quatrième exercice.

1°) Soit $a \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions opposées si $a \neq 0$ et une solution double, $z = 0$, si $a = 0$.

Si on note $a = |a|e^{i\theta}$ $\theta \in]-\pi, \pi]$ les solutions de $z^2 = a$ sont $z = \pm \sqrt{|a|} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2°) Dans $M_2(\mathbb{C})$, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire car le polynôme

caractéristique est systématiquement scindé. A est donc semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

La trace et le déterminant de deux matrices semblables étant les mêmes, on a, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \text{tr}(A) = a + d \\ \alpha\beta = \det(A) = ad - bc \end{cases}$$

On en déduit $(A - \alpha Id)(A - \beta Id) = A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta Id = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)Id$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a + d) \\ b(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3°) On suppose A diagonalisable. Cela veut dire que A est semblable à une matrice diagonale.

Autrement dit $\exists P$ inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec les éventualités suivantes:

- $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ cas où A est inversible, avec deux valeurs propres distinctes.
- $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ cas où A n'est pas inversible et $A \neq O$.
- $\alpha = \beta$ cas où $A = \alpha Id$.

4°) On suppose A non diagonalisable.

- A admettant toujours des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, si A avait deux valeurs propres distinctes elle serait diagonalisable. Donc A admet une valeur double α .
- Il existe $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \alpha Id)(u) \neq 0$, sinon, on aurait : $\forall u \in \mathbb{C}^2$, $(A - \alpha Id)(u) = 0$ ce qui voudrait dire que $A = \alpha Id$, et alors A serait diagonalisable.
- Soit donc $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \alpha Id)(u) \neq 0$, et posons $v = (A - \alpha Id)(u)$. Montrons que (u, v) est une famille libre, ce qui assurera que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv = 0$. On a donc $au + b(A - \alpha Id)(u) = 0$. Appliquons alors $(A - \alpha Id)$ à cette égalité, on obtient : $a(A - \alpha Id)(u) + b(A - \alpha Id)^2(u) = 0$ soit, puisque $(A - \alpha Id)^2 = O$, $a(A - \alpha Id)(u) = 0$, donc $a = 0$ et par suite $b = 0$.

- Mais alors dans la base (u, v) , l'endomorphisme f de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^2$ aura pour matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, et on aura donc $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ où P est la

matrice de passage de la base canonique à la base (u, v) . En effet:

$$f(u) = A(u) = (A - \alpha Id)(u) + \alpha u = \alpha u + v \quad \text{et}$$

$$f(v) = A(v) = A(A - \alpha Id)(u) = (A - \alpha Id)^2(u) + \alpha(A - \alpha Id)(u) = 0 + \alpha v = \alpha v.$$

5°) Soit l' équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

Une matrice Z solution doit commuter avec A puisque $AZ = ZA = Z^3$. Notons $Z = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$ZA = \begin{pmatrix} a\alpha & c\beta \\ b\alpha & d\beta \end{pmatrix}, \quad AZ = \begin{pmatrix} a\alpha & c\alpha \\ b\beta & d\beta \end{pmatrix} \quad AZ = ZA \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ et donc } Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

L' équation $Z^2 = A$ s' écrit $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et il y a donc quatre solutions à l' équation.

conclusion
$$Z = \begin{pmatrix} \varepsilon \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \varepsilon' \sqrt{|\beta|} e^{i\frac{\theta'}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon' = \pm 1, \quad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}, \quad \beta = |\beta| e^{i\theta'}.$$

6°) Soit l' équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

Là encore une matrice Z solution doit commuter avec A .

$$ZA = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 \\ b\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad AZ = \begin{pmatrix} a\alpha & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad AZ = ZA \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ et donc } Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

L' équation $Z^2 = A$ s' écrit $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et il y a donc deux solutions à l' équation.

conclusion
$$Z = \begin{pmatrix} \varepsilon \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}.$$

7°) Soit l' équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Cas $\alpha = 0$. Alors les matrices $Z = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{C}$ vérifient $Z^2 = O$, il y a donc une infinité de solutions.

- Cas $\alpha \neq 0$. Soit f un endomorphisme involutif, c' est à dire tel que $f^2 = Id$. Il en existe une infinité. En effet, si E_1 et E_2 sont deux sous espaces de $\mathbb{C}^2$ de dimension 1 tels que $\mathbb{C}^2 = E_1 \oplus E_2$, l' endomorphisme f défini par $f(u) = u_1 - u_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_i \in E_i$ est involutif.

Dès lors l' endomorphisme $g = \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} f$ vérifie $g^2 = \alpha Id$ et sa matrice Z vérifiera $Z^2 = A$.

On a donc une infinité de solutions encore dans ce cas.

8°) Soit l' équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Là encore une matrice Z solution doit commuter avec A .

$$ZA = \begin{pmatrix} a\alpha + c & c\alpha \\ b\alpha + d & d\alpha \end{pmatrix}, \quad AZ = \begin{pmatrix} a\alpha & c\alpha \\ b\alpha + a & d\alpha + c \end{pmatrix} \quad AZ = ZA \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \text{ et donc}$$

$$Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}. \text{ L' équation } Z^2 = A \text{ s' écrit } \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- Cas $\alpha = 0$. Alors il n' y a pas de solution.
- Cas $\alpha \neq 0$. Alors il y a deux solutions

$$Z = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{|\alpha|}} e^{-i\frac{\theta}{2}} & \sqrt{|\alpha|} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}.$$

9°) Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ et l' équation $Z^2 = A$.

Soit h l' endomorphisme de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et f

l' endomorphisme de matrice Z relativement à cette même base.

Le problème est donc de chercher les f tels que $f^2 = g$.

- Si A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, on est dans le cas de la question 5)

Il y a quatre solutions.

- Si A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, on est dans le cas de la question 6)

Il y a deux solutions.

- Si A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on est dans le cas de la question 7)

Il y a une infinité de solutions.

- Si A est semblable à $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on est dans le cas de la question 8)

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{pas de solution} \\ \alpha \neq 0 & \text{deux solutions} \end{cases}$$

FIN.