

I Préliminaires

1. Pour $1 \leq i \leq n$: $\sum_{j=1}^m |MN(i, j)| = \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^r M(i, k)N(k, j) \right| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r |M(i, k)||N(k, j)| = \sum_{k=1}^r |M(i, k)| \sum_{j=1}^m |N(k, j)| \leq \sum_{k=1}^r |M(i, k)| \times \|N\| \leq \|M\| \times \|N\|$. On a donc $\|MN\| \leq \|M\| \times \|N\|$.
2. $\sum_{j=1}^n |P(i, j)| = \sum_{j=1}^n P(i, j) = 1$ puisque P est positive et $PJ_n = J_n$. On a donc $\|P\| = 1$.
3. On montre la propriété par récurrence. Elle est vraie pour $k = 1$ puisque P est stochastique. Supposons la vraie pour k . $P^{k+1} = P^k \times P$ est à coefficients positifs puisque P^k et P le sont. De plus, $P^{k+1}J_n = P^k \times PJ_n = P^k \times J_n = J_n$. P^{k+1} est donc bien stochastique.

II Pseudo-inverse

4. D'une part $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$; d'autre part $a = aa' = a^2a'$ entraîne que $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a^2)$. On a donc $\text{Im}(a^2) = \text{Im}(a)$ d'où $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$.
5. Puisque $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$ et $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$ on déduit que $\text{Im}(a^2) = \text{Im}(a)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$: $ax \in \text{Im}(a)$ entraîne qu'il existe y tel que $ax = a^2y$; en posant $z = x - ay$ on obtient que $z \in \text{Ker}(a)$ d'où $x = ay + z \in \text{Im}(a) + \text{Ker}(a)$. Le théorème du rang entraîne alors que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$.
6. Soit $\mathcal{B}'$ une base adaptée à $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$; la matrice de $a \neq 0$ dans cette base s'écrit par blocs: $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $\text{Im}(a)$ est stable par a . La matrice B est inversible puisque la restriction de a à $\text{Im}(a)$, supplémentaire de $\text{Ker}(a)$, est un isomorphisme de $\text{Im}(a)$ sur $\text{Im}(a)$. Si W est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$ on a bien $A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$.
7. Définissons $A' = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$. On vérifie que $AA' = A'A = W \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$, puis que $AA'A = A$ et $A'AA' = A'$: A' est un pseudo-inverse de A .
8. Puisque a' commute avec a , $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par a' . La matrice de a' dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrit donc: $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, d'où $A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} W^{-1}$. De $A' = A'AA'$ on déduit par des produits par blocs: $D = DBD$ et $E = E \times 0 \times E = 0$.
9. $(aa')^2 = a \times a'aa' = a \times a'$ donc $aa' = a'a$ est bien un projecteur. $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(a'a)$ et $\text{Ker}(a'a) \subset \text{Ker}(aa'a) = \text{Ker}(a)$ donc $\text{Ker}(aa') = \text{Ker}(a)$. $\text{Im}(aa') \subset \text{Im}(a)$ et $\text{Im}(a) = \text{Im}(aa'a) \subset \text{Im}(aa')$ donc $\text{Im}(aa') = \text{Im}(a)$. La matrice du projecteur aa' dans la base $\mathcal{B}'$ adaptée à $\mathbb{R}^n = \text{Im}(aa') \oplus \text{Ker}(aa')$ est donc $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ égale aussi à $W^{-1}AA'W$.
10. $W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entraîne $BD = I_r$ d'où $D = B^{-1}$; il y a bien unicité du pseudo-inverse.

III Calcul de X_∞

11. Sans intérêt.
12. Sans intérêt.
13. Le théorème 1 entraîne que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(I_n - P)$ est de dimension 1 et est engendré par J_n (puisque $PJ_n = J_n$) donc $\text{rang}(a)=n-1$; il donne aussi $X_\infty A = X_\infty - X_\infty P = 0$ donc pour tout X , $X_\infty AX = 0$: $\text{Im}(a)$ est donc inclus dans l'hyperplan d'équation $X_\infty Y = 0$, donc est égal à cet hyperplan ($\text{rang}(a)=n-1$); puisque $X_\infty J_n = 1$ (X_∞ est une ligne stochastique), J_n n'est pas dans $\text{Im}(a)$ et donc $\text{Im}(a) \cap \text{Ker}(a) = \{0\}$ d'où $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$. On en déduit que $\text{Im}(a) = a(\mathbb{R}^n) = a(\text{Im}(a) + \text{Ker}(a)) = a^2(\mathbb{R}^n) = \text{Im}(a^2)$.
14. On fait une démonstration par récurrence. C'est immédiat pour $k = 1$: $I_n = (I_n - (I_n - C))C^{-1}$.
Supposons l'égalité vraie pour k ; on obtient pour $k + 1$: $\sum_{j=0}^k (I_n - C)^j = (I_n - (I_n - C)^{k+1})C^{-1} + (I_n - C)^k = (I_n - (I_n - C)^k + (I_n - C)^k C)C^{-1} = (I_n - (I_n - C)^{k+1})C^{-1}$. L'égalité est donc vraie pour $k + 1$.
15. On fait une démonstration par récurrence. C'est immédiat pour $k = 1$: $I_n = (I_n - P)A' + (I_n - AA')$ puisque $I_n - P = A$. Supposons l'égalité vraie pour k ; on obtient pour $k + 1$: $\sum_{j=0}^k P^j - (I_n - P^{k+1})A' - (k+1)(I_n - AA') = P^k + (I_n - P^k)A' - (I_n - P^{k+1})A' - (I_n - AA') = P^k + (P^{k+1} - P^k)A' - (I_n - AA') = P^k(I_n - AA') - (I_n - AA') = (P^k - I_n)(I_n - AA') = (P^{k-1} + \dots + I_n)(P - I_n)(I_n - AA') = (P^{k-1} + \dots + I_n)(-A + A^2 A') = 0$. L'égalité est donc vraie pour $k + 1$.
Une autre méthode utilise la question 14 en prenant $C = B$ pour $A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$ d'où $P = W \begin{pmatrix} I_r - B & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} W^{-1}$.
 $\sum_{j=0}^{k-1} P^j = W \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} (I_r - B)^j & 0 \\ 0 & kI_{n-r} \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & kI_{n-r} \end{pmatrix} W^{-1}$. Cette matrice est bien égale à $(I_n - P^k)A' + k(I_n - AA') = W \begin{pmatrix} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} + kW \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} W^{-1}$.
16. $\|(I_n - P^k)A'\| \leq (\|I_n\| + \|P\|^k)\|A'\|$ puisque $\|\dots\|$ est une norme et en utilisant la question 1. Avec la question 2 on obtient $\|(I_n - P^k)A'\| \leq 2\|A'\|$ d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}(I_n - P^k)A' = 0$. On en déduit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$.
17. D'une part, $\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j$ a ses coefficients positifs (question 3); la matrice limite $I_n - AA'$ a donc également ses coefficients positifs. D'autre part $(I_n - AA')J_n = J_n - A'AJ_n = J_n$ puisque $AJ_n = J_n - PJ_n = 0$. $I_n - AA'$ est bien stochastique.
 $(I_n - AA')A = A - AA'A = 0$ puisque A' est le pseudo-inverse de A .
18. Utilisons le théorème 1: pour $X \in \mathcal{K}_n$ on a $X_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} XP^j = X(I_n - AA')$; en prenant $X = E_i$ (ligne i de la matrice I_n) on obtient que la ligne i de la matrice $I_n - AA'$ est égale à X_∞ . On a donc bien $I_n - AA' = J_n X_\infty$.

ANNEXE

Les questions 11 et 12 sont inutiles; de plus le théorème 1, au lieu d'être admis, peut très facilement se démontrer au cours du problème.

- On remplace les questions 11 à 13 par:

Montrer que si P est une matrice stochastique strictement positive alors $\text{Ker}(P - I_n)$ est une droite engendrée par J_n . Soit alors $A = I_n - P$; montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A)$ (indication: introduire pour $X \in \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$ un Y tel que pour tout $k \geq 1$: $kX = Y - P^k Y$).

Démonstration:

Soit $X \neq 0$ tel que $PX = X$; soit k tel que $|x_k| = N_\infty(X)$; quitte à changer X en $-X$ on peut supposer $x_k > 0$. $x_k = \sum_{j=1}^n p_{k,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n p_{k,j} x_k = x_k$ d'où $\sum_{j=1}^n p_{k,j} (x_k - x_j) = 0$ avec $p_{k,j} > 0$ et $x_k - x_j \geq 0$. On en déduit pour tout j , $x_j = x_k$ et donc $X = x_1 J_n$.

Remarque: on peut affaiblir l'hypothèse sur P en supposant P stochastique et il existe $a > 0$ tel que P^a soit strictement positive; on a en effet $\text{Ker}(P - I_n) \subset \text{Ker}(P^a - I_n)$.

Soit $X \in \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$: $PX = X$ et il existe Y tel que $X = Y - PY$. En appliquant P on obtient, pour tout $k \geq 1$, $X = P^{k-1}Y - P^k Y$ d'où en ajoutant de 1 à k : $kX = Y - P^k Y$. On a

$N_\infty(PY) \leq N_\infty(Y)$ puisque pour tout i , $\left| \sum_{j=1}^n p_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n p_{i,j} |y_j| \leq \sum_{j=1}^n p_{i,j} N_\infty(Y) = N_\infty(Y)$. Par

suite, $N_\infty(X) \leq \frac{1}{k}(N_\infty(Y) + N_\infty(P^k Y)) \leq \frac{2}{k}N_\infty(Y)$ d'où en faisant tendre k vers $+\infty$: $X = 0$. On a donc $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A) = \{0\}$ d'où $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A)$.

- La question 16 donne $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$ qui est, d'après la question 9, la matrice de

la projection sur $\text{Ker}(A)$ parallèlement à $\text{Im}(A)$. Puisque $\text{Ker}(A)$ est engendré par J_n on déduit $I_n - AA' = J_n L$ où L est une matrice ligne stochastique positive ($I_n - AA'$ est stochastique positive). $\text{Ker}(I_n - AA') = \text{Im}(A)$ entraîne que pour toute colonne X , $J_n L A X = 0$ et donc $J_n L A = 0$; la ligne $L A$ est donc nulle soit encore $LP = L$. L est donc l'unique (puisque $\dim(\text{Ker}(P - I_n))=1$) matrice ligne stochastique telle que $L = LP$. Pour toute matrice ligne stochastique X ($X J_n = 1$), on a

donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} X P^j = X(I_n - AA') = X J_n L = L$ ce qui fournit la dernière partie du théorème 1

(on pose $L = X_\infty$).