CCINP PSI 2025 Mathématiques - Un corrigé

EXERCICE

Probabilités

Q1. Puisque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\boxed{\text{l'espérance et la variance de la variable aléatoire } X \text{ valent } \lambda}$.

Q2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$$\mathrm{P}\big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big) = \mathrm{P}\big(|X-\mathrm{E}(X)| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

.

Q3. Soit $\omega \in \{X \geqslant 2\lambda\}$. Alors on a $X(\omega) - \lambda \geqslant \lambda$. Or $\lambda > 0$, donc $X(\omega) - \lambda > 0$.
On a ainsi $|X(\omega) - \lambda| \geqslant \lambda$.

$$\boxed{\text{L'événement } \{X \geqslant 2\lambda\} \text{ est inclus dans l'événement } \big\{|X-\lambda| \geqslant \lambda\big\}.}$$

On peut aussi dire que $\big\{|X-\lambda| \geqslant \lambda\big\}$ est la réunion de $A = \{X \geqslant \lambda\} \cap \{X - \lambda \geqslant \lambda\}$ et de $\{X \leqslant \lambda\} \cap \{-X + \lambda \geqslant \lambda\}$. Or, A est égal à $\{X \geqslant 2\lambda\}$. D'où la conclusion.

Q4. On a donc $\mathrm{P}\big(X \geqslant 2\lambda\big) \leqslant \mathrm{P}\big(|X-\lambda| \geqslant \lambda\big)$. D'où d'après Q2 :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \tag{1}$$

Q5. Pour tout réel t, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ est convergente, car on reconnaît une série exponentielle.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } G_X \text{ est } \mathbb{R}.}$$

Q6. Pour tout $t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda t - \lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.}$$

Q7. Soient $t \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons n_0 le plus petit entier naturel supérieur à α. On a :

$$\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{P}(X = n).$$

Donc $\displaystyle \mathrm{P}(X \geqslant \alpha)t^\alpha = \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{P}(X=n)t^\alpha$.

Or, puisque $t \geqslant 1$, on a pour $n \geqslant n_0 \geqslant \alpha$, $t^\alpha \leqslant t^n$ d'où :

$$\mathrm{P}(X \geqslant \alpha)t^\alpha \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)t^n.$$

En ajoutant des termes positifs, on majore $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)t^n$ par $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)t^n$ qui est $G_X(t)$.

D'où, en divisant par $t^\alpha > 0$:

$$\boxed{\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.}$$

Q8. Avec $\alpha = 2\lambda$, on obtient $\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}$.

Cela étant vrai pour tout $t \geqslant 1$, on a avec $t = 2$:

$$\boxed{\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\mathrm{e}^\lambda}{4^\lambda} = \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda} \tag{2}$$

Q9. Puisque $\lambda > 0$, on a par stricte croissance du logarithme népérien :

$$\frac{1}{\lambda} \geqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda \iff -\ln(\lambda) \geqslant \lambda \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right) \iff \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leqslant \ln(4) - 1.$$

L'étude de $\Psi : \lambda \mapsto \dfrac{\ln(\lambda)}{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ montre que Ψ admet un maximum atteint en e valant $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On admet que $\mathrm{e} \cdot (\ln(4) - 1) \geqslant 1,05$, donc

$$\forall \lambda > 0, \qquad \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \frac{\ln(4) - 1}{1,05} \leqslant \ln(4) - 1.$$

On a donc pour tout $\lambda > 0$, $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$:

$$\boxed{\text{La majoration (2) de } \mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \text{ est la plus précise que la majoration (1).}}$$

PROBLÈME 1

Séries de Fourier

Q10. Par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

En posant $t = -u$, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{0} f(-u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} f(-u)\mathrm{d}u$.

Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(-u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ (variable muette).

On a donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$

Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(-u)\mathrm{d}u = -\int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Q11. Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]0;\pi]$:

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Si g convient, on doit avoir $g(0) = 0$ (car g est impaire).

Et pour $x \in [-\pi; 0[$, $g(x) = -g(-x) = -\dfrac{\pi + x}{2}$, car $-x \in]0;\pi]$.

La fonction est alors déterminée de façon unique par 2π-périodicité.

Réciproquement, en posant :

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi + x}{2} & \text{si } x \in]-\pi; 0[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in]0;\pi] \end{cases}$$

et en prolongeant g par 2π-périodicité, on définit une fonction g sur $\mathbb{R}$.

- Par construction, g est 2π-périodique.
- La fonction est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car elle est continue sur $]-\pi;\pi] \setminus \{0\}$ et les limites directionnelles aux éventuels points de discontinuité sont finies :

$$\lim_{0^+} g = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R},\ \lim_{0^-} g = -\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R},\ \lim_{\pi^-} g = 0 \in \mathbb{R},\ \lim_{\pi^+} g = \lim_{-\pi^+} g = 0 \in \mathbb{R}.$$

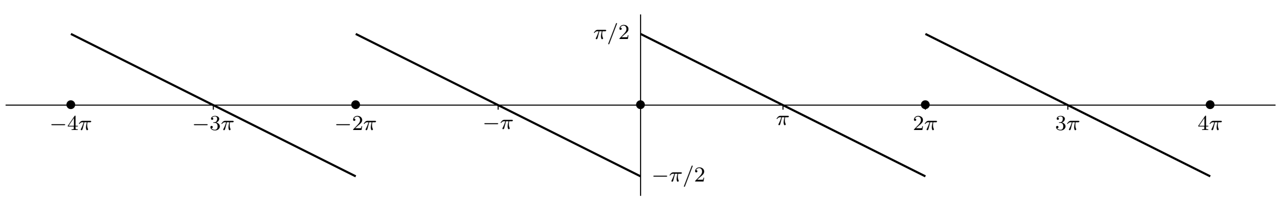
  Remarque : On constate que g est en fait continue en π.
- La fonction g est impaire sur $[-\pi;\pi]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $k \in \mathbb{Z}$, tel que $-x + 2k\pi \in [-\pi;\pi]$ et alors:

$$g(-x) = g(-x + 2k\pi) = -g(x - 2k\pi) = -g(x).$$

Il existe une manière et une seule de définir g sur $\mathbb{R}$

telle que $\boxed{g \text{ soit continue par morceaux, impaire et } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$

On obtient le graphe ci-dessous (en $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ la fonction est discontinue et vaut 0) :



Q12. Rappelons que g est impaire, donc $a_0(g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t = 0$.

Comme $\sin(0) = 0$, $b_0(g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 0\mathrm{d}t = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto g(t)\cos(nt)$ est impaire, donc $a_n(g) = 0$.

La fonction $t \mapsto g(t)\sin(nt)$ est paire, donc $b_n(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\pi - t}{2}\sin(nt)\mathrm{d}t.$

On calcule $\displaystyle\int_0^\pi (\pi-t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ par intégration par parties en utilisant (les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$) $u(t)=\pi-t$ et $v(t)=-\dfrac{1}{n}\cos(nt)$ (rappelons que $n\neq 0$):

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\pi-t)\sin(nt)\mathrm{d}t &= \left[-(\pi-t)\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t\\ &= 0+\frac{\pi}{n}-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a montré que } a_0(g)=b_0(g)=0 \text{ et que pour tout } n\in\mathbb{N}^*, a_n(g)=0 \text{ et } b_n(g)=\frac{1}{n}.}$$

Partie II - Convergence d'une série de Fourier

Q13. Soit $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;1]$.

$$\left|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 = |1-t\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x)|^2 = (1-t\cos(x))^2+t^2\sin^2(x)$$

Pour $t=0$, ce module vaut 1 et donc il n'est pas nul. Pour $t\in\,]0,1]$, on a donc :

$$\left|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|=0 \iff \sin(x)=0 \text{ et } t\cos(x)=1.$$

Si $\sin(x)=0$, on a soit $\cos(x)=-1$, mais $t=-1$ est exclu; soit $\cos(x)=1$ et $t=1$.

$$\boxed{\text{Pour } (x,t)\in\mathbb{R}\times[0;1],\ \left|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|=0 \text{ si et seulement si } x\equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ et } t=1.}$$

Q14. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<b<\pi$ et $x\in[a;b]$.

La fonction $\varphi : t\mapsto \left|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|$ est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum m. Comme φ est positive, on a $m\geqslant 0$.

De plus, d'après la question précédente cette fonction ne s'annule pas car $x\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Donc $m\neq 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } m\in\mathbb{R}_+^* \text{ tel que pour tout } t\in[0;1],\ \left|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\geqslant m.}$$

Q15. Soit $x\in\,]0;\pi[$.

Pour tout $t\in[0,1]$, $\dfrac{1}{|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\leqslant\dfrac{1}{m}$ (d'après la Q14, $m>0$).

Comme $t^n\geqslant 0$, $\dfrac{t^n}{|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\leqslant\dfrac{1}{m}t^n$ et on obtient par croissance de l'intégrale :

$$0\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{m}\mathrm{d}t=\frac{1}{m}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

On en déduit par le théorème des suites encadrantes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^n}{|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\mathrm{d}t=0}$$

Remarque: On aurait pu ne pas demander la Q14 et faire utiliser le théorème de convergence dominée...

Q16. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $x \in]0;\pi[$ et $t \in [0;1]$, on a $t^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^{n-1}$.

On a donc une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} t^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sum_{n=1}^{N}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-t^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}}$$

Q17. Soit $x \in]0;\pi[$.

Par linéarité de l'intégrale, on obtient avec $\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\frac{1}{n} = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{t^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}t$$

Or :

$$\left|\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{t^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{t^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right|\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^N}{|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\mathrm{d}t$$

D'après Q15, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \frac{t^N}{|1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}\mathrm{d}t = 0$, donc par encadrement $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{t^N\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}t = 0$

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n} \text{ converge et } \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}.}$$

Remarque : Là aussi, le concepteur a évité le théorème de convergence dominée.

Q18. Soit $\lambda \in]-1;1[$.

Pour tout $t \in [0,1]$, $t^2 - 2\lambda t + 1 = (t-\lambda)^2 + 1 - \lambda^2 \geqslant 1 - \lambda^2$.

Comme $1-\lambda^2 > 0$, le trinôme ne s'annule pas, l'intégrale $I(\lambda)$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Si on connaît par cœur une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$, on conclut rapidement; sinon, on procède par changement successifs :

On pose $u = t - \lambda$:

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{1}{t^2-2\lambda t+1}\mathrm{d}t = \int_{-\lambda}^{1-\lambda}\frac{1}{u^2+1-\lambda^2}\mathrm{d}u.$$

Puis on pose $u = \sqrt{1-\lambda^2}\,x$, on a $\mathrm{d}u = \sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{d}x$:

$$I(\lambda) = \sqrt{1-\lambda^2}\int_{-\lambda/\sqrt{1-\lambda^2}}^{(1-\lambda)/\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{1}{(1-\lambda^2)x^2+1-\lambda^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_{-\lambda/\sqrt{1-\lambda^2}}^{(1-\lambda)/\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

On reconnaît la dérivée d'arctan. D'où en utilisant l'imparité :

$$\boxed{I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\Big[\arctan(x)\Big]_{-\lambda/\sqrt{1-\lambda^2}}^{(1-\lambda)/\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\arctan\left(\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)\right).}$$

Q19. Soit $x \in]0;\pi[$. On a $\lambda = \cos(x) \in]-1;1[$. Et $\sqrt{1-\cos^2(x)} = \left|\sin(x)\right| = \sin(x)$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-2t\cos(x)+t^2}\mathrm{d}t = I\big(\cos(x)\big) = \frac{1}{\sin(x)}\left(\arctan\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\right).$$

D'une part, $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \tan(x/2)$. Comme $\dfrac{x}{2} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \arctan\big(\tan(x/2)\big) = \frac{x}{2}.$$

D'autre part, $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. Comme $\dfrac{\pi}{2}-x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{\pi}{2}-x.$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1-2t\cos(x)+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sin(x)}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\sin(x)}\cdot\frac{\pi-x}{2}.}$$

Q20. D'après Q17, $S_g(x) = \operatorname{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}\right) = \operatorname{Im}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\mathrm{d}t\right)$

Or, $(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = 1-2t\cos(x)+t^2$, d'où $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-t}{1-2t\cos(x)+t^2}$. Donc :

$$S_g(x) = \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2}\mathrm{d}t = \sin(x)I\big(\cos(x)\big).$$

D'après Q19, on obtient

$$\forall x \in]0;\pi[, \quad S_g(x) = \sin(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)}\frac{\pi-x}{2} = \frac{\pi-x}{2} = g(x)$$

Rappelons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Donc S_g est 2π-périodique, impaire et on a $S_g(\pi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 = g(\pi)$.

$$\boxed{\text{D'après Q11, les fonctions } S_g \text{ et } g \text{ sont identiques.}}$$

PROBLÈME 2

Inégalité et matrices de Hadamard

Q21. Notons h la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x - (1+x)$.
h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = e^x - 1$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau permet d'affirmer que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1+x \iff x = 0.}$

Q22. Fixons i entre 1 et n.
On remarque que comme les réels λ_i ne sont pas tous nuls et positifs, A est un réel non nul.
La question **Q21** appliquée à $x = \dfrac{\lambda_i}{A} - 1$ donne immédiatement $\boxed{\dfrac{\lambda_i}{A} \leqslant exp\left(\dfrac{\lambda_i}{A} - 1\right),}$ avec égalité si et seulement si $\lambda_i = A$.

Q23. Par définition, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = nA$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = G^n$.
En multipliant les n inégalités portant sur des nombres **positifs** obtenues à la question **Q22**, on obtient

$$\frac{G^n}{A^n} \leqslant exp\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{A} - n\right) \quad \text{soit} \quad \frac{G^n}{A^n} \leqslant 1 \quad \text{et donc} \quad \boxed{G \leqslant A}$$

Q24.

- Supposons : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = \lambda_1$. Alors $A = G = \lambda_1$.
- Réciproquement supposons que $G = A$. Alors, en reprenant les inégalités de la question **Q23**, il est nécessaire qu'il y ait égalité dans chaque inégalité de la question **Q22**. Or cela n'est possible que si $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = A$ et donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = \lambda_1$.
- On a donc bien prouvé que $\boxed{G = A \text{ si et seulement si } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n.}$

Q25. S est une matrice symétrique réelle donc le théorème spectral permet d'affirmer que

$$\boxed{S \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

S a donc n valeurs propres réelles (et strictement positives par hypothèse) notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et le cours indique que

$$\boxed{\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.}$$

Q26. Les valeurs propres de S sont des réels positifs et non tous nuls donc les questions **Q23** et **Q25** donnent

$$\boxed{(\det(S))^{1/n} \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(S)}{n}.}$$

Q27. • Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $S = \lambda I_n$.

Alors $\det(S) = \lambda^n$ et $\mathrm{Tr}(S) = n\lambda$ donc $(\det(S))^{1/n} = \lambda = \dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{n}$.

• Supposons $(\det(S))^{1/n} = \dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{n}$.

Cette égalité est le cas d'égalité dans $G \leqslant A$ donc par la question **Q24**, toutes les valeurs propres de S sont égales à un même réel λ. Comme S est définie positive, $\lambda > 0$. De plus, S est diagonalisable donc elle est semblable à λI_n et finalement $S = \lambda I_n$.

• On a donc prouvé que

$$\boxed{(\det(S))^{1/n} = \frac{\mathrm{Tr}(S)}{n} \iff \exists\, \lambda > 0 \;/\; S = \lambda I_n.}$$

Q28. S est une matrice symétrique définie positive donc $\forall X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T S X > 0$.
Notons $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
Fixons j entre 1 et n et considérons $X = E_j$. On a donc $X \neq 0$ et ainsi $X^T S X > 0$.
Or $X^T S X = \langle X, SX \rangle = s_{j,j}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \quad \forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad s_{j,j} > 0.}$$

Q29. On remarque que la matrice D est bien définie et inversible d'après la question **Q28**.

• Notons $D^{-1} = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors $\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad d_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{1}{\sqrt{s_{j,j}}} & \text{si } i = j \end{cases}$

Notons $D^{-1} S D^{-1} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors , pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a, par définition de D^{-1} :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} (SD^{-1})_{k,j} = d_{i,i} (SD^{-1})_{i,j} = d_{i,i} \sum_{k=1}^{n} s_{i,k} d_{k,j} = d_{i,i}\ s_{i,j}\ d_{j,j}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \quad D^{-1} S D^{-1} = \left(\frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i}\ s_{j,j}}} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$$

• On a clairement $\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}$ et $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} = 1$ donc

$$\boxed{D^{-1} S D^{-1} \text{ est une matrice réelle symétrique dont les éléments diagonaux valent 1.}}$$

• Enfin, prenons X un élément non nul de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$. On a, puisque D^{-1} est diagonale :

$$X^T D^{-1} S D^{-1} X = X^T (D^{-1})^T S D^{-1} X = (D^{-1} X)^T S (D^{-1} X) = Y^T S Y$$

en notant $Y = D^{-1} X$. Comme X est non nul et D^{-1} est inversible, le vecteur Y est non nul.
Et comme S est définie positive, on en déduit que $X^T D^{-1} S D^{-1} X = Y^T S Y > 0$.
On a ainsi prouvé que $\boxed{D^{-1} S D^{-1} \text{ est une matrice réelle symétrique définie positive.}}$

Q.30 • La matrice $D^{-1} S D^{-1}$ est une matrice réelle symétrique définie positive donc par la question **Q26** :

$$(\det(D^{-1} S D^{-1}))^{1/n} \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(D^{-1} S D^{-1})}{n}.$$

D'après la question **Q29**, $\mathrm{Tr}(D^{-1}SD^{-1}) = 1$, donc $(\det(D^{-1}SD^{-1}))^{1/n} \leqslant 1$ puis

$$\det(D^{-1}SD^{-1}) \leqslant 1.$$

Or $\det(D^{-1}SD^{-1}) = (\det(D^{-1}))^2 \det(S)$, donc, comme les réels manipulés sont positifs, on obtient $\det(S) \leqslant (\det(D))^2$, soit, par définition de D,

$$\boxed{\det(S) \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_{j,j}}$$

- On a utilisé **Q27** pour montrer cette inégalité, et d'après **Q27** :

$$\begin{aligned}
\det(S) = \prod_{j=1}^{n} s_{j,j} &\iff (\det(D^{-1}SD^{-1}))^{1/n} = \frac{\mathrm{Tr}(D^{-1}SD^{-1})}{n} \\
&\iff \exists\, \lambda > 0 \ / \ D^{-1}SD^{-1} = \lambda I_n \\
&\iff \exists\, \lambda > 0 \ / \ S = \lambda D^2 \\
&\iff \exists\, \lambda > 0 \ / \ \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i \neq j \implies s_{i,j} = 0) \quad \text{et} \quad s_{i,i} = \lambda s_{i,i} \\
&\iff \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i \neq j \implies s_{i,j} = 0)
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{\det(S) = \prod_{j=1}^{n} s_{j,j} \quad \text{si et seulement si } S \text{ est diagonale.}}$$

Q31. Soit M une matrice inversible. Notons A la matrice $M^T M$.

- On a, par propriété de la transposée , $A^T = M^T \, (M^T)^T = M^T M = A$, donc A est une matrice symétrique.
- De plus $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$, $X^T A X = X^T M^T M X = (MX)^T (MX) = ||MX||^2$, $||\ ||$ désignant la norme euclidienne usuelle sur $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
  Si MX est le vecteur nul, alors comme M est inversible, on obtient que X est le vecteur nul, ce qui est exclu. On en déduit donc

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}, \quad X^T A X > 0$$

- Et on conclut que $\boxed{M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$

Q32. *Il y a une erreur d'énoncé. Le résultat annoncé n'est pas vrai pour les matrices non inversibles.* Considérons une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Supposons M inversible.

- La question **Q31** indique que $M^T M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

  La question **Q30** permet alors d'affirmer que $\det(M^T M) \leqslant \prod_{j=1}^{n} (M^T M)_{j,j}$.

  Or $\det(M^T M) = (\det(M))^2$ et $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $(M^T M)_{j,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (m_{k,j})^2$.

  Et finalement, en prenant la racine carrée de ces réels positifs :

$$\boxed{|\det(M)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (m_{i,j})^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.}$$

- En utilisant les notations de l'énoncé, et par définition du produit matriciel, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (M^T M)_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle.$$

Donc, la question **Q30** permet d'affirmer que

$$\boxed{|\det(M)| = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \iff M^T M \text{ est diagonale } \iff \forall\, i \neq j, \langle C_i, C_j \rangle = 0.}$$

b) Supposons M non inversible.

- Alors $\det(M) = 0$, donc l'inégalité (3) est trivialement vraie.
- De plus

$$\begin{aligned}|\det(M)| = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} &\iff 0 = \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2\right) \\ &\iff \exists\, j \in [\![1,n]\!] \ / \ \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(m_{i,j})^2}_{\geqslant 0} = 0 \\ &\iff \exists\, j \in [\![1,n]\!] \ / \ \forall\, i \in [\![1,n]\!], m_{i,j} = 0\end{aligned}$$

Et finalement

$$\boxed{|\det(M)| = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \iff \exists\, j \in [\![1,n]\!] \ / \ C_j = 0.}$$

Q33. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |m_{i,j}| \leqslant 1.$

- On a ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (m_{i,j})^2 \leqslant 1$ et

$$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2 \leqslant n,$$

Comme on a sommé n inégalités pour obtenir ce résultat, on a , pour $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2 = n \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad (m_{i,j})^2 = 1 \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad |m_{i,j}| = 1.$$

Comme on manipule des réels positifs, on ne change pas le sens des inégalités en utilisant des produits et , par (3) :

$$|\det(M)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n} n\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{n}{2}}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{n}{2}} &\iff \forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2 = n \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |m_{i,j}| = 1\end{aligned}$$

- Supposons que $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.
Cette égalité implique les cas d'égalités cités ci-dessus, ainsi que le cas d'égalité de la question **Q32**. On vient de voir que cette égalité entraine que $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |m_{i,j}| = 1,$ donc M ne comporte pas de colonne nulle, donc par la question **Q32**, les colonnes de M, C_1, C_2, …, C_n, sont deux à deux orthogonales.
Or on a vu que $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (M^TM)_{i,j} = \langle C_i, C_j\rangle$. Donc la matrice M^TM est diagonale.
De plus :
$$\forall\,j \in [\![1,n]\!], \quad (M^TM)_{j,j} = \sum_{i=1}^{n}(m_{i,j})^2 = n$$
Donc
$$M^TM = nI_n$$

- Supposons que $M^TM = nI_n$ et $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |m_{i,j}| = 1$.
Alors $(\det(M))^2 = n^n$ et $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.

- Conclusion :
$$\boxed{|\det(M)| \leqslant n^{\frac{n}{2}}}$$
$$\boxed{|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}} \iff \big(M^TM = nI_n \quad \text{et} \quad \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |m_{i,j}| = 1\big)\,.}$$

Q34. On suppose que $M \in \mathcal{H}_n$ donc $\dfrac{1}{n}M^T \times M = I_n$ donc
$$\boxed{M \text{ est inversible et } \quad M^{-1} = \frac{1}{n}M^T.}$$

- Si $n \geqslant 2$ alors $|(M^{-1})_{1,1}| = \dfrac{|m_{1,1}|}{n} = \dfrac{1}{n} \neq 1$ donc $\boxed{M^{-1} \notin \mathcal{H}_n.}$
- Si $n = 1$ alors $M^{-1} = M$ et $\boxed{M^{-1} \in \mathcal{H}_1.}$

Q35.

- Notons A la matrice par blocs, $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
$M \in \mathcal{H}_n$ donc $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |m_{i,j}| = 1$ et ainsi $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |a_{i,j}| = 1$.
De plus, comme $M^TM = nI_n$, on a :
$$A^TA = \begin{pmatrix} M^T & M^T \\ M^T & -M^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2nI_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & 2nI_n \end{pmatrix} = 2nI_{2n}$$
On en déduit que
$$\boxed{\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{2n}}$$

- Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{Q}_p$: $''2^p \in H''$
$\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies car $(1) \in \mathcal{H}_1$ et $N \in \mathcal{H}_2$.
Supposons $\mathcal{Q}_p$ vraie et montrons que $\mathcal{Q}_{p+1}$ est vraie .
Par hypothèse, $2^p \in H$, donc $\mathcal{H}_{2^p} \neq \emptyset$ donc il existe une matrice M appartenant à $\mathcal{H}_{2^p}$.
Alors d'après le premier point, $\begin{pmatrix} M & M \\ M & -M \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{2\times 2^p}$, donc $\mathcal{H}_{2^{p+1}} \neq \emptyset$ et $2^{p+1} \in H$.
Ainsi $\mathcal{Q}_{p+1}$ est vraie .
Par principe de récurrence, on a
$$\boxed{\forall\,p \in \mathbb{N}, \quad 2^p \in H.}$$

Q36. $M^T M = nI_n$ donc $\quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle C_i, C_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ n & \text{si} \quad i = j \end{cases}$

En particulier, $\quad \langle C_1, C_2 \rangle = 0$. Comme les coefficients de C_1 sont tous égaux à 1, la somme des coefficients de C_2 vaut 0. Or, par hypothèse, les coefficients de C_2 valent 1 ou -1. Donc il y a autant de 1 que de -1 et $\boxed{n \text{ est pair.}}$

Q37. Sachant que tous les coefficients de C_1 valent 1, et que les autres coefficients valent 1 ou -1, on a :

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_{i,2} = 1 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + (-1) \times t = x + y - z - t$$

De même

$$\langle C_1, C_3 \rangle = x - y + z - t \quad \text{et} \quad \langle C_2, C_3 \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_{i,2} m_{i,3} = x - y - z + t$$

On a envisagé tous les cas possibles pour C_2 et C_3 donc $\quad x + y + z + t = n$.
Cela fournit le système :

$$\boxed{(S) \quad \begin{cases} x + y - z - t & = & 0 \\ x - y + z - t & = & 0 \\ x - y - z + t & = & 0 \\ x + y + z + t & = & n \end{cases}}$$

Q38. On résout (S) :

$$(S) \iff \begin{cases} -y + z + t & = & x & (1) \\ y - z + t & = & x & (2) \\ y + z - t & = & x & (3) \\ x + y + z + t & = & n & (4) \end{cases} \iff \begin{cases} -y + z + t & = & x & (1) \\ t & = & x & (1) + (2) \\ z & = & x & (1) + (3) \\ x + y + z + t & = & n & (4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y & = & x \\ t & = & x \\ z & = & x \\ 4x & = & n \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{n \text{ est un multiple de 4.}}$$