

# Écoles Normales Supérieures-

## Concours d'admission 2014 - filière MP

### Corrigé de l'épreuve de mathématiques C

Merci à Jean-Marie Mirebeau, concepteur du sujet, pour les éclaircissements qu'il m'a apporté sur la fin de la partie C et sur la portion supprimée de la partie D.

#### A- Préliminaires

##### I. Étude de la norme et du produit scalaire associé à $M$

**I.1**  $M$  est symétrique définie positive, donc il existe  $P \in O_2(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \mu_1^2(M) & 0 \\ 0 & \mu_2^2(M) \end{pmatrix}$ . Comme  $P$  est orthogonale, on peut écrire :

$$M = P \begin{pmatrix} \mu_1(M) & 0 \\ 0 & \mu_2(M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1(M) & 0 \\ 0 & \mu_2(M) \end{pmatrix} {}^tP = {}^tAA$$

en notant  $A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2(M) \end{pmatrix} {}^tP$ , qui est bien inversible.

**I.2** Pour  $u, v \in \mathbb{R}^2$  :

- $\langle u, v \rangle_M = \langle u, Mv \rangle = {}^tuMv = {}^tu{}^tAAv = {}^t(Au)(Av) = \langle Au, Av \rangle$  ;
- $\|u\|_M = \sqrt{\langle u, u \rangle_M} = \sqrt{\langle Au, Au \rangle} = \|Au\|$ .

**I.3** C'est une conséquence directe de la question précédente (mais c'est aussi la définition habituelle d'une matrice symétrique définie positive) :

- l'application est clairement bilinéaire ;
- elle est symétrique car  $\langle u, v \rangle_M = \langle Au, Av \rangle = \langle Av, Au \rangle = \langle v, u \rangle_M$  pour tous  $u, v \in \mathbb{R}^2$  ;
- elle est définie positive car  $\langle u, u \rangle_M = \|Au\|^2 \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $Au = 0$ , i.e. si et seulement si  $u = 0$  ( $A$  est inversible).

**I.4** Pour  $u \in \mathbb{R}^2$ , posons  ${}^tPu = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  (en reprenant l'expression de la matrice  $A$ ). Comme  $P$  est orthogonale,  $\|u\| = \|v\|$ . On a ensuite :

$$\|u\|_M^2 = \|Au\|^2 = \|\mu_1(M)v_1 + \mu_2(M)v_2\|^2 = \mu_1(M)^2v_1^2 + \mu_2(M)^2v_2^2$$

et la condition  $\mu_1(M) \leq \mu_2(M)$  donne  $\mu_2(M)\|u\| = \mu_2(M)\|v\| \leq \|u\|_M \leq \mu_1(M)\|v\| = \mu_1(M)\|u\|^2$ .

**I.5** Pour  $u \in \mathbb{R}^2$ , nous avons :

$$u \in \overline{B}(r) \iff \|u\| \leq r \iff \|A(A^{-1}u)\| \leq r \iff \|A^{-1}u\|_M \leq r \iff A^{-1}u \in \overline{B}_M(r)$$

ce qui signifie que  $\overline{B}(r)$  est l'image de  $\overline{B}_M(r)$  par  $A$ .

On en déduit que  $\text{Aire}(\overline{B}_r) = |\det(A)| \times \text{Aire}(\overline{B}_M(r))$ , soit  $\text{Aire}(\overline{B}_M(r)) = \frac{\pi r^2}{\sqrt{\det({}^tAA)}} = \frac{\pi r^2}{\sqrt{\det M}}$ .

## II. Encadrement des minima de Minkowski

**II.1** Pour  $u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\|u\| \geq 1$ , donc  $\|u\|_M \geq \mu_1(M)\|u\| \geq \mu_1(M)$ . La borne inférieure  $\lambda_1(M)$  est donc supérieure ou égale au minorant  $\mu_1(M)$ .

**II.2** En utilisant l'inégalité  $\|v\|_M \leq \mu_2(M)\|v\|$ , on voit qu'il suffit de trouver un couple  $(u, v)$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que :

- $(u, v)$  est libre ;
- $\|u\|_M \leq \|v\|_M$  ;
- $\|v\| = 1$ .

En notant  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on choisit  $(u, v) = (e_1, e_2)$  si  $\|e_1\|_M \leq \|e_2\|_M$  et  $(u, v) = (e_2, e_1)$  sinon. Toutes les conditions demandées sont vérifiées, ce qui donne :

$$\lambda_2(M) \leq \|v\|_M \leq \mu_2(M)\|v\| = \mu_2(M).$$

**III.3** Notons  $V = \{v \in \mathbb{Z}^2, \exists u \in \mathbb{Z}^2, \text{Det}(u, v) \neq 0 \text{ et } \|u\|_M \leq \|v\|_M\}$ . Pour tout  $v \in V$ , il existe en particulier  $u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  tel que  $\|u\|_M \leq \|v\|_M$ . Nous en déduisons :

$$\lambda_1(M) \leq \|u\|_M \leq \|v\|_M$$

et donc  $\lambda_1(M) \leq \inf_{v \in V} \|v\|_M = \lambda_2(M)$ .

Nous avons donc démontré que  $\mu_1(M) \leq \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \mu_2(M)$ .

**IV.4** Supposons que  $M = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$  avec  $0 < \alpha \leq \beta$  (la preuve serait symétrique avec  $0 < \beta \leq \alpha$ ).  $e_1 = (1, 0)$  est un élément non nul de  $\mathbb{Z}^2$ , donc  $\lambda_1(M) \leq \|e_1\|_M = \alpha = \mu_1(M)$ , ce qui donne  $\lambda_1(M) = \mu_1(M)$  avec II.1.

Supposons que  $v = (a, b) \in V$  (voir la définition de  $V$  à la question précédente). Si  $b \neq 0$ , nous avons :

$$\|v\|_M = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} \geq \beta = \mu_2(M).$$

Si  $b = 0$ , il existe  $u = (a', b') \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $(u, v)$  est libre et  $\|u\|_M \leq \|v\|_M$ . Comme  $b'$  est non nul,  $\|u\|_M \geq \mu_2(M)$ .

Ainsi, nous avons  $\lambda_2(M) = \inf_{v \in V} \|v\|_M \geq \mu_2(M)$ , d'où  $\lambda_2(M) = \mu_2(M)$  avec II.2.

**IV.5** Notons  $r = \|e_1\|_M$ . Nous avons :

- $e_1 \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}) \cap \overline{B}_M(r)$  ;
- $\|u\|_M > r = \|e_1\|_M$  si  $u \notin \overline{B}_M(r)$ .

donc  $\lambda_1(M) = \inf \{\|u\|_M, u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}\} = \inf \{\|u\|_M, u \in (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}) \cap \overline{B}_M(r)\}$ .

Comme  $(\mathbb{Z}^2 \cap \overline{B}_M(r)) \setminus \{0\}$  est une partie finie (c'est une partie discrète bornée de  $\mathbb{R}^2$ ), l'infimum  $\lambda_1(M)$  est atteint.

Le même argument montre que  $\lambda_2$  est atteint ( $V$  est une partie discrète non vide : on choisit  $v_0 \in V$  et on travaille sur  $V \cap \overline{B}_M(r)$  où  $r = \|v_0\|_M$ ).

## B Produit des minima de Minkowski

### I. Caractérisation des bases de $\mathbb{Z}^2$

**I.1a**  $\text{Det}[u, v] = \text{Det}(u, v) \in \{-1, 1\}$  donc  $[u, v] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible, avec :

$$[u, v]^{-1} = \frac{1}{\text{Det}([u, v])} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$$

**I.1b** Si  $z \in \mathbb{Z}^2$ , on pose  $[u, v]^{-1}z = w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers relatifs et  $z = [u, v]w = \alpha u + \beta v$ .

**I.2** Il existe en particulier  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z}$  tels que  $e_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v$  et  $e_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v$ . Ceci prouve que  $(u, v)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et que la matrice de passage  $P$  de  $(u, v)$  à  $(e_1, e_2)$  est à coefficients entiers. On en déduit que  $[u, v] \times P = I_2$ , puis que  $\underbrace{\text{Det}(u, v)}_{\in \mathbb{Z}} \times \underbrace{\text{Det}(P)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$ , d'où  $|\text{Det}(u, v)| = 1$  et  $(u, v)$  est une base du réseau  $\mathbb{Z}^2$ .

### II. Définition et existence d'une base $M$ -réduite

**II.1** Par définition des  $\lambda_i(M)$ , il existe  $u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  et  $v' \in V$  tels que  $\lambda_1(M) = \|u\|_M$  et  $\lambda_2(M) = \|v'\|_M$ . Si  $(u, v')$  est libre, on pose  $v = v'$  et le couple  $(u, v)$  vérifie les conditions demandées. Sinon, il existe  $v \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $(v, v')$  est libre et  $\|v\|_M \leq \|v'\|_M$ . La famille  $(u, v)$  est donc libre et  $\|u\|_M \leq \|v\|_M$  :  $v$  est donc élément de  $V$ , ce qui prouve que  $\lambda_2(M) \leq \|v\|_M \leq \|v'\|_M = \lambda_2(M)$ . Le couple  $(u, v)$  est solution du problème posé.

**II.2a** Notons  $p$  (resp.  $q$ ) un entier le plus proche de  $\alpha$  (resp. de  $\beta$ ). En posant  $\alpha' = \alpha - p$  et  $\beta' = \beta - q$ , nous avons :

$$|\alpha'| \leq \frac{1}{2}, |\beta'| \leq \frac{1}{2}, (\alpha', \beta') \notin \mathbb{Z}^2 \text{ et } z' = \alpha' u + \beta' v = z - pu - qv \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$$

puisque  $p, q \in \mathbb{Z}$  et  $z, u, v \in \mathbb{Z}^2$ .

**II.2b** Si  $\beta' = 0$ ,  $\|z'\|_M = |\alpha'| \|u\|_M < \|u\|_M = \lambda_1(M)$ .

Si  $\beta'$  est non nul, on a  $\|z'\|_M \leq |\alpha'| \|u\|_M + |\beta'| \|v\|_M \leq \frac{1}{2} \lambda_1(M) + \frac{1}{2} \lambda_2(M) \leq \lambda_2(M)$  car  $\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M)$ . Si on avait égalité, les vecteurs  $\alpha' u$  et  $\beta' v$  seraient positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski). Comme  $(u, v)$  est libre et  $\beta'$  est non nul, ceci impliquerait que  $\alpha' = 0$ , ce qui donnerait :

$$\|z'\|_M = |\beta'| \|v\|_M \leq \frac{1}{2} \lambda_2(M) < \lambda_2(M).$$

Ainsi, on a nécessairement  $\|v\|_M < \lambda_2(M)$ .

**II.2c** Les deux cas étudiés à la question précédente sont absurdes : si  $\beta' = 0$ ,  $z'$  est un élément non nul de  $\mathbb{Z}^2$  et  $\|z'\|_M < \lambda_1(M) \leq \|z'\|_M$ ; sinon, comme  $u, z' \in \mathbb{Z}^2$  avec  $\text{Det}(u, z') \neq 0$  et  $\|u\|_M \leq \|z'\|_M$ , on a  $z' \in V$  et  $\lambda_2(M) \leq \|v\|_M < \lambda_2(M)$ .

On en déduit que tout élément de  $\mathbb{Z}^2$  s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs  $u$  et  $v$ , qui forment donc une base du réseau  $\mathbb{Z}^2$ .

### III. Propriétés géométriques

**III.1** L'aire de  $T$  vaut  $\frac{1}{2} |\text{Det}(a, b)|$ . Ce résultat étant maintenant hors programme, on peut le démontrer en revenant à un résultat de géométrie élémentaire : l'aire de  $T$  vaut  $\frac{1}{2} \|a\| \times \|b\| \times |\sin(\theta)|$  où  $\theta$  est l'angle  $(\widehat{a, b})$ . Si l'on pose  $\varepsilon_1 = \frac{a}{\|a\|}$  et si l'on complète en  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  base orthonormale directe de  $\mathbb{R}^2$ , nous avons :

$$a = \|a\| \varepsilon_1 \text{ et } b = \|b\| (\cos(\theta) \varepsilon_1 + \sin(\theta) \varepsilon_2)$$

puis (la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est une base orthonormale directe) :

$$\text{Det}(a, b) = \text{Det}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(a, b) = \begin{vmatrix} \|a\| & \|b\| \cos(\theta) \\ 0 & \|b\| \sin(\theta) \end{vmatrix} = \|a\| \|b\| \sin(\theta).$$

**III.2** On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(Q) &= \frac{1}{2} (|\text{Det}(u', v')| + |\text{Det}(v', -u')| + |\text{Det}(-u', -v')| + |\text{Det}(-v', u')|) \\ &= \frac{2}{\|u\|_M \|v\|_M} |\text{Det}(u, v)| \\ &= \frac{2}{\lambda_1(M) \lambda_2(M)} \text{ car } (u, v) \text{ est une base de } \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

**III.3**  $Q$  est l'enveloppe convexe des points  $u', v', -u'$  et  $-v'$ . Comme ces quatre points appartiennent à  $\overline{B}_M(1)$  qui est une partie convexe (dans un espace vectoriel normé, toute boule est convexe),  $Q \subset \overline{B}_M(1)$  et  $\text{Aire}(Q) \leq \text{Aire}(\overline{B}_M(1))$ , ce qui est l'inégalité demandée, d'après les résultats des questions B.III.3 et A.I.5.

**III.4a** Pour  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , les vecteurs  $u$  et  $v + \varepsilon u$  sont des vecteurs de  $\mathbb{Z}^2$  indépendants vérifiant  $\|u\|_M \leq \|v + \varepsilon u\|_M$ ; on en déduit que  $v + \varepsilon u \in V$ , d'où  $\|v + \varepsilon u\|_M \geq \lambda_2(M) = \|v\|_M$ .

**III.4b** L'idée est d'utiliser les égalités  $\|v + \varepsilon u\|_M^2 = \|u\|_M^2 + \|v\|_M^2 + 2\varepsilon \langle u, v \rangle_M$  avec  $\varepsilon = 1$  et  $\varepsilon = -1$ , qui permettent d'encadrer  $\langle u, v \rangle_M$  :

$$\begin{cases} 2 \langle u, v \rangle_M = \|v + u\|_M^2 - \|u\|_M^2 - \|v\|_M^2 \geq -\|u\|_M^2 = -\lambda_1(M)^2 \\ 2 \langle u, v \rangle_M = \|u\|_M^2 + \|v\|_M^2 - \|v - u\|_M^2 \geq \|u\|_M^2 = \lambda_1(M)^2 \end{cases}$$

d'où  $|\langle u', v' \rangle_M| = \frac{|\langle u, v \rangle_M|}{\lambda_1(M) \lambda_2(M)} \leq \frac{\lambda_1(M)}{2\lambda_2(M)} \leq \frac{1}{2}$  puisque  $\lambda_1(M) \leq \lambda_2(M)$ .

**III.4c** Posons  $x = |\alpha|$  et  $y = |\beta|$ . Pour la fin de la question, il est plus simple de travailler avec des inégalités strictes. Nous allons démontrer la propriété un peu plus forte que celle demandée :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y > 1 \implies x^2 + y^2 - xy > 1/4.$$

Nous pouvons utiliser un argument géométrique : cette inégalité signifie que le demi-plan ouvert d'équation  $x + y > 1$  est contenu dans la partie (F) d'équation  $x^2 + y^2 - xy > 1/4$ , qui est la partie ouverte non bornée délimitée par l'ellipse (E) d'équation  $x^2 + y^2 - xy = 1/4$ . L'intersection de l'ellipse (E) et de la droite (D) qui délimite le demi-plan se calcule en étudiant les racines du trinôme :

$$P(x) = x^2 + (1-x)^2 - x(1-x) - 1/4 = 3x^2 - 3x + \frac{3}{4} = 3(x - 1/2)^2.$$

La droite (D) est donc tangente à (E), ce qui prouve, par convexité, que deux cas seulement sont possibles : le demi-plan est contenu dans (F) ou bien l'intérieur de l'ellipse est contenue dans le demi-plan ; ce second cas étant exclu (l'origine est à l'intérieur de l'ellipse mais n'est pas dans le demi-plan), nous avons démontré l'inclusion demandée.

Une autre solution consiste, en partant de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x + y - 1 = t > 0$ , à vérifier que le trinôme  $P(x) = x^2 + (1+t-x)^2 - x(1+t-x) - 1/4 = 3x^2 - 3x(1+t) + t^2 + 2t + 3/4$  est strictement positif, ce qui est le cas car le discriminant de  $P$  est égal à  $-3t(2+t)$ , qui est strictement négatif.

On en déduit :

$$\|\alpha u' + \beta v'\|_M^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \langle u', v' \rangle_M \geq \alpha^2 + \beta^2 - |\alpha||\beta| \geq \frac{1}{4}.$$

**III.4d** Ainsi, un point qui n'appartient pas à  $Q$  n'appartient pas à  $\overline{B}_M(1/2)$ , donc  $\overline{B}_M(1/2) \subset Q$ , puis :

$$\frac{2}{\lambda_1(M)\lambda_2(M)} = \text{Aire}(Q) \geq \text{Aire}(\overline{B}_M(1/2)) = \frac{\pi}{4\sqrt{\det(M)}},$$

ce qui donne, avec l'inégalité démontrée à la question 3 :

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\det(M)} \leq \lambda_1(M)\lambda_2(M) \leq \frac{8}{\pi}\sqrt{\det(M)}.$$

## C Valeur moyenne des minima de Minkowski

### I. Continuité des minima de Minkowski

**I.1** On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités démontrées précédemment :

$$\left| \|u\|_{M'}^2 - \|u\|_M^2 \right| = \left| \langle u, (M' - M)u \rangle \right| \leq \|M' - M\| \|u\|^2 \leq \mu_1(M)^2 \eta \times \frac{1}{\mu_1(M)^2} \|u\|_M$$

d'où  $(1 - \eta)\|u\|_M^2 \leq \|u\|_{M'}^2 \leq (1 + \eta)\|u\|_M^2$ , qui est l'inégalité demandée quand  $\eta < 1$ .

**I.2** Les inégalités précédentes donnent :

$$\sqrt{1 - \eta} \lambda_1(M) = \inf_{u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sqrt{1 - \eta} \|u\|_M \leq \inf_{u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \|u\|_{M'} \leq \inf_{u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \sqrt{1 + \eta} \|u\|_M = \sqrt{1 + \eta} \lambda_1(M).$$

Notons  $V$  et  $V'$  les ensembles associés à  $M$  et  $M'$  pour définir  $\lambda_2(M)$  et  $\lambda_2(M')$ . Il existe  $v \in V$  tel que  $\lambda_2(M) = \|v\|_M$ . Il existe ensuite  $u \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $(u, v)$  est libre et  $\|u\|_M \leq \|v\|_M$ . Deux cas sont alors possibles :

- si  $\|u\|_{M'} \leq \|v\|_{M'}$ ,  $v' \in V'$  et :

$$\lambda_2(M') \leq \|v\|_{M'} \leq \sqrt{1 + \eta} \|v\|_M = \sqrt{1 + \eta} \lambda_2(M).$$

- sinon,  $u \in V'$  et :

$$\lambda_2(M') \leq \|u\|_{M'} \leq \sqrt{1+\eta} \|u\|_M \leq \sqrt{1+\eta} \|v\|_M = \sqrt{1+\eta} \lambda_2(M).$$

Nous avons donc démontré que  $\lambda_2(M') \leq \sqrt{1+\eta} \lambda_2(M)$  et l'autre inégalité s'obtient de façon symétrique.

On peut faire une preuve plus naturelle en remarquant que  $\lambda_2$  a une définition plus simple que celle donnée par l'énoncé :

$$\lambda_2(M) = \inf \{ \max(\|u\|_M, \|v\|_M), (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \text{Det}(u, v) \neq 0 \}.$$

Les inégalités cherchées sont des conséquences directes de :

$$(1-\eta) \max(\|u\|_M, \|v\|_M) \leq \max(\|u\|_{M'}, \|v\|_{M'}) \leq (1+\eta) \max(\|u\|_M, \|v\|_M)$$

- I.3** Soient  $M \in \mathcal{S}_2^{++}$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors un  $\eta_0 \in ]0, 1[$  tel que :

$$\forall \eta \in ]0, \eta_0[, \left( \sqrt{1+\eta} - 1 \right) \lambda_1(M) \leq \varepsilon \text{ et } \left( 1 - \sqrt{1-\eta} \right) \lambda_1(M) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout  $M' \in \mathcal{S}_2^{++}$  :

$$\|M' - M\| \leq \underbrace{\eta_0 \mu_1(M)^2}_{>0} \implies |\lambda_1(M') - \lambda_1(M)| \leq \varepsilon,$$

ce qui traduit que l'application  $\lambda_1$  est continue au point  $M$ .

Une preuve identique prouve que  $\lambda_2$  est continue sur  $\mathcal{S}_2^{++}$ .

- I.4** Les applications  $\theta \mapsto {}^t R_\theta M R_\theta$  (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ),  $\lambda_1, \lambda_2$  (de  $\mathcal{S}_n^{++}$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ ) et  $x \mapsto 1/x$  (de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans lui-même) sont continues, donc les trois intégrales sont bien définies, comme intégrales sur un segment de fonctions continues.

Remarque : comme on le voit à la question C.III.5, ces valeurs moyennes ne dépendent que des deux valeurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et sont obtenues en faisant la moyenne (au sens d'une certaine densité) de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives qui prennent les mêmes valeurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

- I.5** Nous allons utiliser la convexité sur  $]0, +\infty[$  de l'application  $x \mapsto 1/x$ , en passant par des sommes de Riemann : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en notant  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  la subdivision de  $[0, 2\pi]$  de pas constant  $2\pi/n$  et  $f : \theta \mapsto \lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)$ , nous avons :

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \right)^{-1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{f(a_i)}$$

et on obtient le résultat demandé en faisant tendre  $n$  vers l'infini.

- I.6** Cette inégalité est une conséquence directe de l'inégalité (1) (en remarquant que  $\det({}^t R_\theta M R_\theta) = \det(M)$ ).

## II. Estimation d'une intégrale

- II.1** L'astuce consiste à travailler en coordonnées polaire :  $z$  s'écrit  $\|z\| (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ , puis

$$R_\theta z = \|z\| (\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta)).$$

On obtient ensuite :

$$\|R_\theta z\|_M = \|z\| \sqrt{\cos^2(\alpha + \theta) + \mu^4 \sin^2(\alpha + \theta)}$$

Il reste à effectuer le changement de variable  $\theta' = \alpha + \theta$  puis à utiliser la périodicité et les symétries évidentes pour conclure.

**II.2** La fonction sinus est concave sur  $[0, \pi/2]$  (elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde, égale à  $-\sin$ , est négative sur  $[0, \pi/2]$ ). Nous avons donc :

$$\forall t \in [0, 1], \sin\left((1-t) \times 0 + t \times \frac{\pi}{2}\right) \geq (1-t) \sin 0 + t \sin \frac{\pi}{2} = t.$$

On obtient l'inégalité demandée pour  $x \in [0, \pi/2]$  en posant  $t = \frac{2x}{\pi} \in [0, 1]$ .

On en déduit  $\begin{cases} \sqrt{\cos^2(\theta) + \mu^4 \sin^2(\theta)} \geq \mu^2 \sin(\theta) \geq 2\mu^2\theta/\pi \\ \sqrt{\cos^2(\theta) + \mu^4 \sin^2(\theta)} \geq 1 \text{ car } \mu \geq 1 \end{cases}$ , d'où  $\sqrt{\cos^2(\theta) + \mu^4 \sin^2(\theta)} \geq \max\left(1, \frac{2\mu^2\theta}{\pi}\right)$ .

**II.3** Notons  $r = \|z\|$ . La fonction  $E$  est croissante, donc  $I(z) \leq \int_0^{\pi/2} E\left(\frac{1}{r \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)}\right) d\theta$ . Nous avons ensuite :

- pour  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2\mu^2}\right]$ ,  $\frac{1}{r \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)} = \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2\mu}$ , donc  $E\left(\frac{1}{r \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)}\right) = \frac{1}{r}$ ;
- pour  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2\mu^2}, \frac{\pi}{\mu r}\right]$ ,  $\frac{1}{\|z\| \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)} = \frac{\pi}{2r\mu^2\theta} \geq \frac{1}{2\mu}$ , donc  $E\left(\frac{1}{r \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)}\right) = \frac{\pi}{2r\mu^2\theta}$ ;
- pour  $\theta \in \left[\frac{\pi}{\mu r}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{1}{\|z\| \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)} = \frac{\pi}{2r\mu^2\theta} < \frac{1}{2\mu}$ , donc  $E\left(\frac{1}{r \max(1, 2\mu^2\theta/\pi)}\right) = 0$ .

d'où l'inégalité demandée.

**II.4** Le calcul est élémentaire :

$$J(r) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2r\mu^2} + \frac{\pi}{2\mu^2 r} \ln\left(\frac{2\mu}{r}\right) \right) = \frac{1}{\mu^2 r} \ln\left(\frac{2e\mu}{r}\right).$$

### III. Valeur moyenne de l'inverse du premier minimum de Minkowski

**III.1** Remarquons tout d'abord que  $\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)$  est le minimum des  $\|R_\theta z\|_M$  pour  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ . Nous devons donc montrer que ce minimum est atteint pour  $z \in Z$ , i.e. pour  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  tel que  $\|z\| \leq 2\mu$ .

Avec (1), nous avons :

$$\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)^2 \leq \lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta) \lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta) \leq \frac{8}{\pi} \det({}^t R_\theta M R_\theta) = \frac{8}{\pi} \mu^2.$$

Nous en déduisons que  $\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta) \leq 2\mu$ . Or si  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  et si  $z \notin Z$ , on a  $\|z\| > 2\mu$ , puis  $\|R_\theta z\| > 2\mu$  (car  $R_\theta$  est une isométrie pour  $\|\cdot\|$ ), puis  $\|R_\theta z\|_M > 2\mu$  (comme  $\mu^4 \geq 1$ , on montre facilement que  $\|u\|_M \geq \|u\|$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ ). Ainsi, le minimum des  $\|R_\theta z\|_M$  pour  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  est aussi le minimum des  $\|R_\theta z\|_M$  pour  $z$  décrivant  $Z$ .

Par décroissance de l'application inverse sur  $]0, +\infty[$ , nous en déduisons :

$$\frac{1}{\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)} = \max_{z \in Z} \frac{1}{\|R_\theta z\|_M}$$

Ce maximum étant supérieur à  $\frac{1}{2\mu}$ , il n'est pas modifié si l'on remplace  $\frac{1}{\|R_\theta z\|_M}$  par  $E\left(\frac{1}{\|R_\theta z\|_M}\right)$ , puisque l'on ne fait que remplacer les valeurs strictement inférieure à  $\frac{1}{2\mu}$  (et donc strictement inférieures au maximum) par 0.

**III.2** Le maximum précédent est pris sur un ensemble fini de réels positifs : on peut donc le majorer par la somme de ces réels positifs, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)} d\theta \leq \sum_{z \in Z} \int_0^{2\pi} E\left(\frac{1}{\|R_\theta z\|_M}\right) d\theta = \sum_{z \in Z} I(z)$$

**III.3a** Soit  $(x, y) \in Z$  et  $k = \max(|x|, |y|)$ . Comme  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $k \geq 1$ . Nous avons ensuite :

$$k \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|z\| \leq 2\mu$$

donc  $Z$  est contenu dans la réunion des  $Z_k$ , pour  $k$  entier compris entre 1 et  $2\mu$ .

$Z_k$  est l'ensemble des points à coordonnées entières situés sur le carré de sommets  $(k, k)$ ,  $(-k, k)$ ,  $(-k, -k)$  et  $(k, -k)$ . Chaque côté du carré contient  $2k + 1$  points et les quatre sommets sont comptés deux fois :  $Z_k$  est donc de cardinal  $4(2k + 1) - 4$ , soit  $8k$ .

**III.3b** Comme la fonction  $I$  est à valeurs positives, cette inclusion nous permet d'écrire :

$$\sum_{z \in Z} I(z) \leq \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \sum_{z \in Z_k} I(z) \leq \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \sum_{z \in Z_k} J(\|z\|).$$

Or pour  $z = (x, y) \in Z_k$ ,  $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \max(|x|, |y|) = k$  et  $J$  est décroissante sur  $[1, 2\mu]$  :

$$\forall r \in [1, 2\mu], J'(r) = -\frac{2 + \ln(2\mu/r)}{\mu^2 r^2} < 0,$$

$$\text{donc } \sum_{z \in Z} I(z) \leq \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \sum_{z \in Z_k} J(k) = \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \text{Card}(Z_k) J(k).$$

**III.3c** La fonction  $\ln$  est croissante sur  $[1, n]$  donc, par comparaison somme-intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \int_1^n \ln x dx = n \ln n + 1 - n \geq n(\ln n - 1).$$

On en déduit :

$$\sum_{1 \leq k \leq 2\mu} k J(k) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \ln \frac{2e\mu}{k} = \frac{1}{\mu^2} \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} 1 + \ln 2\mu - \ln k$$

$$\text{Nous avons ensuite : } \begin{cases} \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} 1 + \ln 2\mu = [2\mu](1 + \ln 2\mu) \\ - \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \ln(k) \leq [2\mu](1 - \ln[2\mu]) \end{cases}$$

puis ( $\ln$  est 1-lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$ ) :

$$\sum_{1 \leq k \leq 2\mu} kJ(k) \leq \frac{\lfloor 2\mu \rfloor}{\mu^2} \left( 2 + \underbrace{\ln(2\mu) - \ln \lfloor 2\mu \rfloor}_{\leq 2\mu - \lfloor 2\mu \rfloor \leq 1} \right) \leq \frac{6}{\mu}$$

On peut donc choisir  $C = 6$ .

**III.3d** Il suffit d'appliquer les questions précédentes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)} d\theta \leq \sum_{z \in Z} I(z) \leq \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} \text{Card}(Z_k) J(k) = 8 \sum_{1 \leq k \leq 2\mu} k J(k) \leq \frac{8C}{\mu}.$$

**III.4** Nous avons tout d'abord :  $\forall \theta, \lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta) \leq \lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta)$  donc :

$$\int_0^{2\pi} \lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta) d\theta.$$

Il suffit ensuite d'appliquer les résultats démontrés dans cette partie C pour obtenir les deux autres inégalités :

$$\int_0^{2\pi} \lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta) d\theta \underset{I.5}{\geq} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)} d\theta \right)^{-1} \underset{III.3.d}{\geq} \frac{\mu}{8C} = \frac{1}{48} (\det M)^{1/4}.$$

$$\int_0^{2\pi} \lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta) d\theta \underset{I.6}{\leq} \frac{8}{\pi} \sqrt{\det M} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)} d\theta \underset{III.3.d}{\leq} \frac{64c}{\pi} \mu = \frac{384}{\pi} (\det M)^{1/4}$$

Nous avons donc  $c_1 = \frac{1}{48}$  et  $c_2 = \frac{384}{\pi}$ .

**III.5** Si  $M$  est une matrice quelconque de  $S_2^{++}$ , le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormale que l'on peut choisir directe de vecteurs propres de  $M$  :

$$\text{il existe un réel } \alpha \text{ tel que } {}^t R_\alpha M R_\alpha = \begin{pmatrix} \mu_1(M) & 0 \\ 0 & \mu_2(M) \end{pmatrix} = M_0.$$

Un simple changement de variable ( $\theta \longleftrightarrow \alpha + \theta$ ) montre que les minima de Minkowski de  $M$  et  $M_0$  ont les mêmes valeurs moyennes. Enfin, en posant  $N_0 = \beta M_0$  avec  $\beta > 0$ , on montre facilement :

- $\det N_0 = \beta^2 \det M$  ;
- $\lambda_1({}^t R_\theta N_0 R_\theta) = \beta^2 \lambda_1({}^t R_\theta M R_\theta)$  ;
- $\lambda_2({}^t R_\theta N_0 R_\theta) = \beta^2 \lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta)$ .

En choisissant  $\beta = \frac{1}{\mu_1(M)}$ , nous avons  $N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^4 \end{pmatrix}$  avec  $\mu = \left( \frac{\mu_2(M)}{\mu_1(M)} \right)^{1/4} \geq 1$  : on peut donc lui appliquer la question précédente et cela prouve que les inégalités restent vraies pour  $M$ .

**III.6** La question A.II.3 donne des bornes absolues pour  $\lambda_1(M)$  et  $\lambda_2(M)$ , qui sont atteintes par exemple quand la matrice  $M$  est diagonale. Les valeurs  $\mu_1(M)$  et  $\mu_2(M)$  pouvant être très différentes, on obtient ainsi un encadrement très large quand  $\frac{\mu_2(M)}{\mu_1(M)}$  est grand.

Par contre, l'encadrement obtenu à la question C.III.4 montre qu'en moyenne,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont du même ordre de grandeur, à savoir  $\det(M)^{1/4}$ . Il est donc beaucoup plus intéressant quand  $\frac{\mu_2(M)}{\mu_1(M)}$  est grand.

Cette propriété n'a pas d'intérêt dans le cas correspondant au graphique fourni par l'énoncé, puisque les inégalités obtenues avec C.III.4 sont moins bonnes que celles obtenues avec I.II.3 :

$$\frac{1}{48} \sqrt{\mu_1 \mu_2} < \mu_1 < \mu_2 < \frac{384}{\pi} \sqrt{\mu_1 \mu_2}.$$

Par contre, on voit sur le graphique que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont un comportement assez chaotique (de type fractal) ; il apparait également une symétrie approximative par rapport à la droite horizontale  $\lambda = 10$ . Nous pouvons conjecturer que  $\frac{\ln(\lambda_1) + \ln(\lambda_2)}{2}$  est de l'ordre de grandeur de  $\ln 10$ , ce qui est accord avec l'encadrement (1) de la question B.III.4 qui montre que  $\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$  est de l'ordre de grandeur de  $\sqrt{\det(M)}$ .

## D Norme euclidienne des éléments d'une base réduite

### I. Bornes uniformes

**I.1**  $u$  et  $v$  sont des vecteurs non nuls de  $\mathbb{Z}^2$ , donc  $\|u\| \geq 1$  et  $\|v\| \geq 1$ .

Nous avons d'autre part 
$$\begin{cases} \mu_1(M)\|u\| \leq \|u\|_M = \lambda_1(M) \leq \mu_2(M) \\ \mu_1(M)\|v\| \leq \|v\|_M = \lambda_2(M) \leq \mu_2(M) \end{cases},$$

donc  $1 \leq \min(\|u\|, \|v\|) \leq \max(\|u\|, \|v\|) \leq \kappa(M)$ .

**I.2a** Comme  $(u, v)$  est une base de  $\mathbb{Z}^2$  et que  $v \in V$ , il suffit de montrer que  $\lambda_1(M) = \|u\|_M$  et  $\lambda_2(M) = \|v\|_M$ .

Pour  $w = (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\|w\|_M^2 = (a - \mu b)^2 + \mu^2 b^2 \in \mathbb{N}^*$ . En particulier,  $\|w\|_M \geq 1 = \|u\|_M$  et  $\lambda_1(M) = \|u\|_M$ .

D'autre part,  $\|w\|_M = 1$  si et seulement si  $w = u$  ou  $w = -u$ . On en déduit que pour  $w \in V$ ,  $\|w\|_M > 1$ , ce qui impose  $\|w\|_M \geq \mu = \|v\|_M$  : comme  $v \in V$  (car  $(u, v)$  est libre et  $\|u\|_M \leq \|v\|_M$ ),  $\lambda_2(M) = \mu = \|v\|_M$ .

**I.2b** Le polynôme caractéristique de  $M$  est  $X^2 - (2\mu^2 + 1)X + \mu^2$ , de racines  $\mu_1^2 = \frac{1}{2} (2\mu^2 + 1 - \sqrt{1 + 4\mu^4})$  et  $\mu_2^2 = \frac{1}{2} (2\mu^2 + 1 + \sqrt{1 + 4\mu^4})$ . Nous devons donc démontrer :

$$4(1 + \mu^2) (2\mu^2 + 1 - \sqrt{1 + 4\mu^4}) \geq (2\mu^2 + 1 + \sqrt{1 + 4\mu^4})$$

ou encore :

$$(2\mu^2 + 1)(3 + 4\mu^2) \geq \sqrt{1 + 4\mu^4} (5 + 4\mu^2).$$

En élevant au carré (les quantités sont positives) et en posant  $X = \mu^2$ , nous devons démontrer que le polynôme  $32X^2 + 20X - 16$  est positif sur  $[1, +\infty[$ , ce qui est évident.

## II. Borne supérieure en moyenne

II Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous avons en remarquant que  $\mu_1({}^t R_\theta M R_\theta) = \mu_1(M)$  :

$$\max(\|u({}^t R_\theta M R_\theta)\|, \|v({}^t R_\theta M R_\theta)\|) \leq \max\left(\frac{\|u({}^t R_\theta M R_\theta)\|_M}{\mu_1(M)}, \frac{\|v({}^t R_\theta M R_\theta)\|_M}{\mu_1(M)}\right) = \frac{\lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta)}{\mu_1(M)}.$$

En intégrant cette inégalité, nous obtenons :

$$\int_0^{2\pi} \max(\|u({}^t R_\theta M R_\theta)\|, \|v({}^t R_\theta M R_\theta)\|) d\theta \leq \frac{1}{\mu_1(M)} \int_0^{2\pi} \lambda_2({}^t R_\theta M R_\theta) d\theta \leq c_2 \frac{\sqrt{\mu_1(M)\mu_2(M)}}{\mu_1(M)} = c_2 \sqrt{\kappa(M)}.$$

Nous nous retrouvons dans la même situation qu'à la question C.III.6 : les bornes uniformes obtenues à la question D.I.1 ne sont pas du même ordre de grandeur, le minimum pouvant être égal à 1 et le maximum pouvant être de l'ordre de  $\kappa(M)$  (on a mis en évidence un cas particulier où  $\|v\| \geq \kappa(M)/2$ ).

L'inégalité précédente prouve par contre que le maximum des norme est, en moyenne, inférieur à une quantité qui est de l'ordre de  $\sqrt{\kappa(M)}$ . En fait, on peut montrer (seconde partie du D qui a été supprimée pour raccourcir le sujet) :

$$\int_0^{2\pi} \min(\|u({}^t R_\theta M R_\theta)\|, \|v({}^t R_\theta M R_\theta)\|) d\theta \geq C_1 \sqrt{\kappa(M)},$$

où  $C_1$  est une constante ne dépendant pas de  $M$ . Ceci prouve qu'en moyenne, les normes des vecteurs d'une base réduite sont de l'ordre de  $\sqrt{\kappa(M)}$ .