

95 - MATH. II

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUESDEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION M

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES II - M.*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 5 pages.

Le but de ce problème est de montrer que la convergence de la série (S_θ) de terme général $u_n(\theta)$, $n \geq 0$, défini par la relation $u_n(\theta) = |\sin(\theta^n \pi)|$, où θ est un nombre réel donné, est liée à des propriétés algébriques du réel θ .

Quelques notations et définitions sont nécessaires :

- Dans tout le problème la lettre \mathbb{K} désigne soit le corps des rationnels \mathbb{Q} , soit celui des réels \mathbb{R} , soit celui des complexes \mathbb{C} . Une suite $C = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dont tous les éléments c_i , $i \in \mathbb{N}$, appartiennent au corps \mathbb{K} , est dite appartenir à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Une suite $C = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite pseudo-périodique dans \mathbb{K} , si et seulement si elle appartient à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et s'il existe p éléments de \mathbb{K} , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p > 0$) tels que la propriété ci-dessous ait lieu :

quel que soit l'entier n supérieur ou égal à p ,
$$c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j} = \lambda_1 c_{n-1} + \lambda_2 c_{n-2} + \dots + \lambda_p c_{n-p}.$$

- Une fraction rationnelle appartenant au corps $\mathbb{K}(X)$ est dite régulière si 0 n'est pas un pôle.

La première partie étudie les suites pseudo-périodiques et établit le lien entre les séries entières définies à partir d'une suite pseudo-périodique et les fractions rationnelles régulières. La seconde partie énonce des conditions suffisantes et une condition nécessaire pour que la série de terme général $u_n(\theta)$ soit convergente.

Première partie

I-1° Caractérisation des suites pseudo-périodiques :

Associons à une suite $C = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ quelconque, appartenant à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et à un entier naturel n , le déterminant Δ_n défini par la relation suivante :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} .$$

- a. Démontrer que, pour que la suite C soit nulle (i.e. tous les termes c_i sont nuls), il faut et il suffit que le déterminant Δ_n soit nul pour toutes les valeurs de l'entier naturel n .
- b. Démontrer que, si la suite C est pseudo-périodique, les déterminants Δ_n , associés à cette suite, sont nuls à partir d'un certain rang.
- c. Soient trois entiers fixés p, m et n vérifiant les inégalités : $1 \leq p \leq m + 1, 2m+2 \leq n$.

Soit une suite C de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ possédant la propriété :

il existe p éléments de $\mathbb{K}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tels que, pour tout entier k compris entre $m+1$ et

$n-1$ ($m+1 \leq k \leq n-1$), la relation $c_k = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{k-j} = \lambda_1 c_{k-1} + \lambda_2 c_{k-2} + \dots + \lambda_p c_{k-p}$ ait lieu.

Déterminer, au signe près, l'expression du déterminant Δ_{n-m-1} en fonction du déterminant

$$\Delta_m \text{ et de la quantité } a = c_n - \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j} .$$

En déduire que, si le déterminant Δ_m n'est pas nul et si le déterminant Δ_{n-m-1} est nul, il

vient :
$$c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j} .$$

- d. Démontrer que, pour que la suite $C = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ soit pseudo-périodique dans \mathbb{K} , il faut et il suffit qu'il existe un entier $q, (q \geq 0)$ tel que pour tout entier n supérieur ou égal à q , le déterminant Δ_n soit nul.

I-2°) Développement en série entière d'une fraction rationnelle régulière.

Soit f une fraction rationnelle régulière appartenant à $\mathbb{K}(X)$; désignons par P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, avec $Q(0) \neq 0$, tels que cette fraction rationnelle f soit égale à $\frac{P}{Q}$.

- a. Démontrer que la fonction f est développable en série entière dans un voisinage de l'origine. Soit $c_n x^n, n \geq 0$, le terme général de la série entière obtenue. Déterminer le rayon de convergence R ; démontrer que les coefficients $c_n, n \geq 0$, appartiennent au corps \mathbb{K} .
- b. Démontrer que la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ est une suite pseudo-périodique dans \mathbb{K} .

I-3°) Fraction régulière associée à une suite pseudo-périodique.

Soit $(c_i)_{i \geq 0}$ une suite pseudo-périodique dans \mathbb{K} . Par hypothèse, il existe p éléments de \mathbb{K} , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$\text{quel que soit l'entier } n \text{ supérieur ou égal à } p, \quad c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j}.$$

- a. Démontrer l'existence d'un nombre réel A_0 , supérieur ou égal à 1, tel que pour tout réel A supérieur ou égal à A_0 , l'inégalité : $\sum_{j=1}^p |\lambda_j| A^{p-j} \leq A^p$ ait lieu.
- b. En déduire l'existence d'un nombre réel M , tel que, pour tout entier naturel n , la majoration $|c_n| \leq M^{n+1}$, ait lieu.
- c. Démontrer que la série entière de terme général $c_n x^n$, $n \geq 0$, a un rayon de convergence R strictement positif. Soit S la fonction, définie dans l'intervalle de convergence $] -R, R[$, par la

relation :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Démontrer qu'il existe une fraction régulière f unique appartenant à $\mathbb{K}(X)$ telle que $f(x)$ soit égale à $S(x)$ dans l'intervalle $] -R, R[$.

D'après les deux questions I-2 et I-3, il existe une correspondance bijective entre fraction régulière f appartenant à $\mathbb{K}(X)$ et suite pseudo-périodique dans \mathbb{K} . Les termes c_n , $n \geq 0$, de la suite pseudo-périodique associée à la fraction f sont dits brièvement coefficients de f .

I-4°) Fractions rationnelles régulières dont les coefficients sont des entiers relatifs.

- a. Soit f une fraction rationnelle régulière ; supposons qu'elle soit égale à $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes, premiers entre eux, dont les coefficients sont des entiers relatifs, avec $Q(0)=1$. Démontrer que tous les coefficients de f sont des entiers relatifs.
- b. Exemple : Étant donnés deux entiers relatifs c_0 et c_1 , soit $C = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des entiers relatifs définis par ces deux premiers entiers et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 2, \quad c_n = 5 c_{n-1} - 6 c_{n-2}.$$

Déterminer la fraction régulière $f = \frac{P}{Q}$ dont le développement en série entière dans un voisinage de l'origine est la série de terme général $c_n x^n$, $n \geq 0$.

Il sera admis dans la suite, en particulier à la question II-4° e, que, si f est une fraction régulière dont les coefficients c_n , $n \geq 0$, sont des entiers relatifs, il existe deux polynômes P et Q , dont les coefficients sont des entiers relatifs, avec $Q(0)=1$, tels que la fraction f soit égale à $\frac{P}{Q}$.

Seconde partie

Après avoir démontré des conditions suffisantes de la convergence de la série (S_θ) , les inégalités de Hadamard permettent d'en donner une condition nécessaire.

II-1°) Soit θ un nombre réel de valeur absolue inférieure ou égale à 1 ($|\theta| \leq 1$) ; démontrer que la série de terme général $u_n(\theta) = |\sin(\theta^n \pi)|$, $n \geq 0$, est convergente.

II-2°) Supposons que P soit un polynôme tel que : son degré N est un entier supérieur ou égal à 2, ses coefficients sont des entiers relatifs, le terme constant est 1 et les racines (complexes) r_1, r_2, \dots, r_N sont deux à deux distinctes. Soit n un entier naturel quelconque différent de 0.

a. Soit S_n le nombre complexe :

$$S_n = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(r_k)^n} .$$

En considérant, par exemple, la fraction rationnelle $R = \frac{P'}{P}$ (P' est le polynôme dérivée du polynôme P), démontrer que le réel S_n est un entier relatif.

b. Soit θ un nombre réel de valeur absolue strictement supérieure à 1 ($|\theta| > 1$). Supposons que le réel $r_1 = \frac{1}{\theta}$ soit racine du polynôme P et que les $N-1$ autres racines r_2, r_3, \dots, r_N , toutes distinctes deux à deux, aient un module strictement supérieur à 1.

Démontrer que le réel θ^n vérifie la relation : $\theta^n = S_n + a_n$, où S_n est un entier relatif et a_n le terme général d'une suite réelle tendant vers 0.

En déduire que la série de terme général $u_n(\theta)$, $n \geq 0$, est convergente.

II- 3°) Inégalités de Hadamard :

Considérons un espace euclidien E de dimension n ; désignons respectivement par $(|)$ et $\| \|$ le produit scalaire et la norme associée. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Pour toute suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs de E , désignons par $\det(x_1, x_2, \dots, x_n)$, le déterminant de ces n vecteurs par rapport à la base \mathcal{B} .

a. Les n vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n sont supposés indépendants ; soit (z_1, z_2, \dots, z_n) la suite orthonormée obtenue à partir des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n par la méthode de Schmidt. Établir

l'égalité :

$$\det(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det(z_1, z_2, \dots, z_n) \prod_{k=1}^n (x_k | z_k) .$$

b. En déduire, pour toute suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de n vecteurs de E , l'inégalité :

$$|\det(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| .$$

II-4°) Condition nécessaire de convergence :

Supposons qu'il existe un réel θ de valeur absolue strictement supérieure à 1, $|\theta| > 1$, tel que la série de terme général $u_n(\theta)$, $n \geq 0$, soit convergente. Pour tout entier naturel n , posons :

$$\theta^n = c_n + \varepsilon_n ,$$

où c_n est un entier relatif et ε_n , $n \geq 0$, un réel vérifiant l'encadrement : $-\frac{1}{2} < \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$.

Considérons les trois séries entières (U), (V) et (W) de termes généraux : $c_n x^n$, $\varepsilon_n x^n$, $\theta^n x^n$. Désignons, lorsqu'il y a convergence, par $U(x)$, $V(x)$ et $W(x)$ respectivement la somme de chacune de ces séries :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n , \quad V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n , \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n x^n .$$

Soit respectivement R_U , R_V et R_W les rayons de convergence de chacune de ces séries.

- Déterminer les rayons de convergence R_W et R_U . Établir l'inégalité : $R_V \geq 1$.
- Démontrer que la série de terme général $d_n = c_n - \theta c_{n-1}$, $n \geq 1$, est convergente ainsi que celle de terme général $(d_n)^2$, $n \geq 1$.

Pour tout entier k , $k \geq 1$, posons : $P_k = \sum_{n=k}^{\infty} (d_n)^2$.

- Soit Δ_n le déterminant associé à la suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et à un entier naturel n (question I-1°). Démontrer l'existence d'une constante K telle que, pour tout entier n , l'inégalité

$$(\Delta_n)^2 \leq K \theta^{2n} \prod_{k=1}^n P_k ,$$

ait lieu.

En déduire que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, lorsque n croît indéfiniment, puis que le réel Δ_n est nul à partir d'un certain rang.

- Démontrer que la série entière de terme général $\varepsilon_n x^n$, $n \geq 0$, est le développement en série entière d'une fraction rationnelle. Démontrer que le rayon de convergence R_V est strictement supérieur à 1.
- En déduire que le réel $\frac{1}{\theta}$ est l'unique racine dans le disque unité fermé d'un polynôme Q dont les coefficients sont entiers.

FIN DU PROBLÈME