

Partie 1

1. Dans toutes les questions géométriques, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La courbe représentative de f est le segment $[OA]$, où A est de coordonnées $(1, 1)$: sa longueur est $\sqrt{2}$.

Et $\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$. C'est le même résultat.

2. $L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (\text{sh}(t))^2} dt.$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + (\text{sh}(t))^2 = (\text{ch}(t))^2$, et $\text{ch}(t) \geq 0$, donc $L(f) = \int_0^1 \text{ch}(t) dt$,

donc $\boxed{L(f) = \text{sh}(1)}$.

3. (a) Pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $1 - t^2 > 0$, et $\sqrt{\quad}$ est C^1 sur $]0, +\infty[$, donc f est C^1 sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

et, pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $f'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Ainsi, $L(f) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} dt = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

donc $\boxed{L(f) = \frac{\pi}{4}}$.

(b) La courbe représentative de f est le plus court des deux arcs du cercle de centre O , de rayon 1, délimités par les points $A(0, 1)$ et $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Or $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$, donc on retrouve que $L(f) = \frac{\pi}{4}$.

4. $L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt.$

La question I.2 suggère le changement de variable $t = \frac{\text{sh}(\varphi)}{2}$.

La fonction $\varphi \mapsto \frac{\text{sh}(\varphi)}{2}$ est de classe C^1 sur $[0, \text{Argsh}(2)]$, à valeurs dans $[0, 1]$,

et $t \mapsto \sqrt{1 + 4t^2}$ est continue sur $[0, 1]$,

donc $L(f) = \int_0^{\text{Argsh}(2)} \sqrt{1 + (\text{sh}(\varphi))^2} \frac{\text{ch}(\varphi)}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\text{Argsh}(2)} (\text{ch}(\varphi))^2 d\varphi.$

Or, pour tout $\varphi \in [0, \text{Argsh}(2)]$, $(\text{ch}(\varphi))^2 = \frac{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} + 2}{4} = \frac{\text{ch}(2\varphi) + 1}{2}$,

donc $L(f) = \frac{1}{4} \int_0^{\text{Argsh}(2)} (1 + \text{ch}(2\varphi)) d\varphi.$

Finalement : $\boxed{L(f) = \frac{2\text{Argsh}(2) + \text{sh}(2\text{Argsh}(2))}{8}}$.

Partie 2

1. (a) $L(f) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt.$

(b) La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1 sur $[1, 2]$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et $t \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne :

$$L(f) = \int_2^1 \sqrt{1 + u^4} \left(\frac{-du}{u^2}\right) = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{u^4} + 1} du.$$

C'est le résultat demandé par l'énoncé.

2. (a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et tout $t \in]-1, 1[$:

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} t^n.$$

(b) Pour tout $n \geq 1$, $\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right) (2k-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-1)(1)(3)\cdots(2n-3).$

On multiplie numérateur et dénominateur par le produit des entiers pairs allant de 2 à $2n-2$, autrement dit $2^{n-1}(n-1)!$:

$$\text{cela donne } \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.$$

On multiplie maintenant numérateur et dénominateur par $(2n-1)(2n)$, ce qui donne :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)n!}.$$

Or, pour tout $t \in]0, 1[$, $t^4 \in]0, 1[$, donc, d'après la formule rappelée à la question précédente :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} t^{4n-2}.$$

(c) • La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, donc il suffit de comparer le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ à 1.

Or, pour tout $n \geq 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)2n-1}{2^2(n+1)^2} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2n-1}{2(n+1)}$, ce qui est strictement inférieur à 1.

Ainsi : la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît strictement.

• On va appliquer la formule de Stirling : $p! \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi p} p^p e^{-p}$.

Par produit et quotient d'équivalents, on obtient :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(2n-1) 2^{2n} 2\pi n \cdot n^{2n} e^{-2n}}.$$

On simplifie : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}}{(2n-1) 2\pi n}$. Or $2n-1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$, donc, à nouveau par produit d'équivalents :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}.$$

(d) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$

$$\text{par } g_n(t) = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} t^{4n-2}.$$

• Si :

– chacune des fonctions g_n est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$

– la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement vers une fonction S continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$

– chaque fonction g_n est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et la série $\sum \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right[} |g_n|$ converge

alors S est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, et $\int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right[} S = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right[} g_n$.

• – D'après la question II.2.2, les deux premiers points sont acquis, la fonction S étant définie sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ par $S(t) = \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} - \frac{1}{t^2}$.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n peut être prolongée en une fonction continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |g_n(t)| \leq a_n, \text{ donc } 0 \leq \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right[} |g_n| \leq \frac{a_n}{2}.$$

Or les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont positives, équivalentes, et la série

$\sum \frac{1}{2\sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}$ converge, donc la série $\sum a_n$ converge, donc la série $\sum \int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right[} |g_n|$ converge.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\left[\frac{1}{2}, 1\right[} g_n = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{4n-1}}}{4n-1}$.

• On peut conclure que $L(f) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{4n-1}}}{4n-1}$,

$$\text{donc } L(f) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{4n-1}}}{4n-1}.$$

(e) • On va utiliser la majoration du reste d'une série alternée : on sait que, si $(u_n)_{n \geq 1}$

est une suite qui décroît vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge, et, pour $N \geq 1$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_{N+1}.$$

- Pour prouver décroissance de la suite $(u_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{4n-1}}}{4n-1} \right)_{n \geq 1}$,

on revient à l'expression intégrale $u_n = \int_{\frac{1}{2}}^1 a_n t^{4n-2} dt$.

Pour tout $n \geq 1$, et tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ et $0 \leq t^{4n+2} \leq t^{4n-2}$, donc $a_{n+1} t^{4n+2} \leq a_n t^{4n-2}$.

Par intégration d'une inégalité entre deux bornes rangées dans l'ordre croissant, on en déduit que $u_{n+1} \leq u_n$.

Et, comme la série $\sum (-1)^{n-1} u_n$ converge, $|(-1)^{n-1} u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

- Il en résulte que

$$\left| L(f) - \left(1 + \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{4n-1}}}{4n-1} \right) \right| \leq \frac{10!}{2^{10} \cdot 9 \cdot (5!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{19}}}{19}.$$

- Je cède la main à Mathematica :

```

In[1]:= u[n_] := (2*n)! * (1 - 1/2^(4*n-1)) / (2^(2*n) * (2*n-1) * (n!)^2 * (4*n-1))
In[2]:= u[n]
Out[2]=  $\frac{2^{-2n} (1 - 2^{1-4n}) (2n)!}{(-1+2n) (-1+4n) (n!)^2}$ 
In[3]:= N[u[5]]
Out[3]= 0.00143914
In[4]:= N[1 + Sum[(-1)^(n-1) * u[n], {n, 1, 4}]]
Out[4]= 1.13119
In[5]:= N[Sqrt[5/4]]
Out[5]= 1.11803

```

Les résultats obtenus permettent d'affirmer que

$$1,1311 < 1 + \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{4n-1}}}{4n-1} < 1,1313$$

$$\text{et } 0 < \frac{10!}{2^{10} \cdot 9 \cdot (5!)^2} \frac{1 - \frac{1}{2^{19}}}{19} < 0,002, \text{ donc } 1,1291 < L(f) < 1,1333.$$

Par conséquent : $\boxed{L(f) = 1,13 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

- On doit trouver une quantité plus grande que la distance des extrémités de la courbe représentative de f , lesquelles sont de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ et $(1, 1)$. Cette distance vaut $\sqrt{\frac{5}{4}}$, ce qui est bien plus petit que 1,1291... mais en réalise une bonne approximation !

Partie 3

1. (a) On a vu aux I.1 et I.4 que

$$\boxed{\lambda_1 = \sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{2\text{Argsh}(2) + \text{sh}(2\text{Argsh}(2))}{8}}.$$

- (b) Avec de grosses réserves, la partie V montrant que raisonner sur la suite des fonctions p_n ne prouve pas grand-chose !

Les courbes des fonctions p_n sont de plus en plus proches de la réunion des deux segments $[OA]$ et $[AB]$, où A et B sont de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(1, 1)$, donc, à première vue, la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ semble converger vers $OA + AB = 2$.

2. (a) Pour tout $n \geq 1$, $\lambda_n - \int_0^1 nt^{n-1} dt = \int_0^1 (\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} - nt^{n-1}) dt$.

Mais, pour tout $t \in [0, 1]$, $\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}$ est supérieur ou égal à 1, donc non nul, donc, en multipliant le numérateur et le dénominateur de l'intégrande par $\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}$, on obtient :

$$\lambda_n - \int_0^1 nt^{n-1} dt = \int_0^1 \frac{1 + n^2 t^{2n-2} - n^2 t^{2n-2}}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}} dt,$$

$$\text{donc } \boxed{\lambda_n - \int_0^1 nt^{n-1} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}}}.$$

- (b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}} - 1$ est continue et négative ou nulle sur $[0, 1]$, donc son intégrale sur $[0, 1]$ est négative ou nulle, donc $\mu_n \leq 1$.

Si l'égalité était réalisée, φ_n serait CONTINUE, négative ou nulle, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc serait identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Or $\varphi_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 + n}} - 1$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{3}} - 1$, donc strictement inférieur à 0, et donc $\mu_n < 1$.

Or $\int_0^1 nt^{n-1} dt = 1$, donc, d'après III.2.1, $\boxed{\lambda_n < 2}$.

- (c) Avec les notations de la question précédente, la théorème de convergence dominée assure que, si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est continue par morceaux sur $[0, 1]$

- la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction φ continue par morceaux sur $[0, 1]$
- il existe une fonction ψ , continue par morceaux sur $[0, 1]$ (ce qui assure qu'elle est intégrable sur $[0, 1]$), telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\varphi_n| \leq \psi$

alors la suite $\left(\int_0^1 \varphi_n(t) dt \right)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_0^1 \varphi(t) dt$.

Ici :

- Chaque fonction φ_n est continue sur $[0, 1]$
- Par règle de croissances comparées, $(nt^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(n^2t^{2n-2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 lorsque $|t| < 1$, donc la suite $(\varphi_n(t))_{n \geq 1}$ converge vers 1 si $t \in [0, 1[$, et vers 0 si $t = 1$. Par conséquent, la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers φ définie par : pour tout $t \in [0, 1[$, $\varphi(t) = 1$, et $\varphi(1) = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\varphi_n| \leq 1$, et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$.

Par conséquent, la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_0^1 \varphi(t) dt = 1$.

(d) D'après III.2.1 et III.2.2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n = 1 + \mu_n$, donc

la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ converge vers 2.

3. En s'inspirant de III.2.1, on calcule $L(f) - \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (f'(t))^2} - f'(t) \right) dt$.

f est croissante, donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) \geq 0$, donc $\sqrt{1 + (f'(t))^2} + f'(t) \geq 1 > 0$,

donc $L(f) - \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2} + f'(t)} dt$.

Comme au III.2.2, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2} + f'(t)}$ est continue sur $[0, 1]$, inférieure

ou égale à 1.

Mais f est dérivable, croissante, non constante, donc il existe $t_0 \in]0, 1[$ pour lequel $f'(t_0) > 0$,

et donc $\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t_0))^2} + f'(t_0)} < 1$.

Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2} + f'(t)}$ ne vaut pas constamment 1, donc, de la même façon qu'au

III.2.2, $L(f) - \int_0^1 f'(t) dt < 1$.

Or $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = 1$, donc $L(f) < 2$.

Partie 4

- (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$, et admet une limite finie (en l'occurrence 1) en 0 : elle se prolonge donc en une fonction continue sur le SEGMENT $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est donc convergente.

- (b) • Les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, de dérivées respectives $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

pour tout $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

donc $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$.

- La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$0 \leq \left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ l'est également, donc $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

Enfin, $\frac{\cos(x)}{x}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, donc $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Finalement : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

- (c) C'est la même méthode qu'à la question précédente.

Par intégration par parties, pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt = \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(2)}{2} + \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t^2} dt.$$

Or $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{2x}$ est de limite nulle en $+\infty$, et $t \mapsto \frac{\cos(2t)}{2t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$,

donc $\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$,

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge.

- (d) • On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(2t) = 1 - 2(\sin(t))^2$.

Ainsi, pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1 - 2(\sin(t))^2}{t} dt$,

donc $\int_1^x \frac{(\sin(t))^2}{t} dt = \frac{1}{2} \left(\ln(x) - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt \right)$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$ tend vers une limite finie, donc

$\int_1^x \frac{(\sin(t))^2}{t} dt$ tend vers $+\infty$: l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t} dt$ diverge.

- Pour tout $t \geq 1$, $|\sin(t)| \in [0, 1]$, donc $\frac{(\sin(t))^2}{t} \leq \frac{|\sin(t)|}{t}$.

Mais la fonction $t \mapsto \frac{(\sin(t))^2}{t}$ est positive, et on vient de voir que son intégrale

entre 1 et $+\infty$ diverge, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge.

2. (a) La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même, et $t \mapsto \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc le changement de variable " $t = \frac{1}{u}$ " donne :

$$\text{pour tout } x \in]0, 1], f(x) = \int_x^1 u \sin(u) \frac{-du}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

$$\text{Quand } x \xrightarrow{>} 0, \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, \text{ donc } f(x) \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

f peut donc être prolongée par continuité en 0.

- (b) La fonction g est continue sur $]0, 1]$, et $1 \in]0, 1]$, donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, f est de classe C^1 sur $]0, 1]$, de dérivée $-g$.

Or g est de classe C^∞ sur $]0, 1]$, donc f aussi.

Comme en plus f est continue en 0, elle est bien continue sur $[0, 1]$.

- (c) La fonction $t \mapsto \left| \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right|$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc on peut effectuer le même changement de variable qu'à la question IV.2.1.

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in]0, 1], \int_x^1 |g(t)| dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{|\sin(u)|}{u} du.$$

Or la fonction $u \mapsto \frac{|\sin(u)|}{u}$ est positive et $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(u)|}{u} du$ diverge,

$$\text{donc } \int_1^M \frac{|\sin(u)|}{u} du \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ donc } \int_x^1 |g(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

3. • Soit $x \in]0, 1[$.

f est C^1 sur $[x, 1]$, donc $\lambda(x)$ est effectivement défini.

$$\text{Et la dérivée de } f \text{ est } -g, \text{ donc } \lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + (g(t))^2} dt.$$

- Pour tout $t > 0$, $1 + (g(t))^2 \geq (g(t))^2 \geq 0$, donc, par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $[0, +\infty[$, $\sqrt{1 + (g(t))^2} \geq |g(t)|$.

Ainsi, lorsque $0 < x \leq 1$, on obtient, par intégration d'une inégalité entre deux bornes rangées dans l'ordre croissant : $\lambda(x) \geq \int_x^1 |g(t)| dt$.

λ est donc plus grande qu'une fonction qui admet $+\infty$ pour limite à droite en 0, donc λ admet $+\infty$ pour limite à droite en 0.

- La fonction f est donc une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, de classe C^1 sur $]0, 1]$, dont la courbe représentative est de longueur infinie.

Partie 5

1. (a) On doit prouver que :

- pour tout $f \in E_1$, $\|f\| \geq 0$, et, si $\|f\| = 0$, alors f est la fonction nulle
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $f \in E_1$, $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$
- pour tout $(f, g) \in E_1^2$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

On le prouve :

- Soit $f \in E_1$.
 $\|f\|$ est positive ou nulle comme somme des deux réels positifs ou nuls
 $|f(0)|$ et $\|f'\|_\infty$.
 De plus, si $\|f\| = 0$, ces deux réels positifs ou nuls sont de somme nulle, donc
 $\|f'\|_\infty = 0$ et $|f(0)| = 0$.
 Ainsi, f' est la fonction nulle, donc f est constante, et $f(0) = 0$, donc f est la
 fonction nulle.
- Soit $f \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 $\|\alpha f\| = |\alpha| |f(0)| + \|\alpha f'\|_\infty$.
 Mais l'énoncé rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, donc $\|\alpha f'\|_\infty = |\alpha| \|f'\|_\infty$.
 Ainsi : $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.
- Soit $(f, g) \in E_1^2$.
 On sait que $|f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$, et, comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme,
 $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
 En additionnant membre à membre, on obtient : $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

$\|\cdot\|$ est donc bien une norme sur E_1 .

- (b) Soit $f \in E_1$.
 Pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = f(0) + (f(t) - f(0))$, donc, d'après l'inégalité triangulaire,
 $|f(t)| \leq |f(0)| + |f(t) - f(0)|$.
 Mais f est dérivable sur $[0, 1]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,
 $|f(t) - f(0)| \leq t \|f'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$.
 Finalement, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$,
 donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|$.
- (c) Il s'agit de savoir s'il existe une constante A strictement positive de sorte que, pour tout
 $f \in E_1$, $\|f\| \leq A \|f\|_\infty$.
 Si tel était le cas, alors pour tout élément f non nul de E_1 , $\|f\|_\infty$ étant strictement
 positif, il viendrait : $\frac{\|f\|}{\|f\|_\infty} \leq A$.

Notamment, en reprenant les notations de la partie III, la suite $\left(\frac{\|p_n\|}{\|p_n\|_\infty}\right)_{n \geq 1}$ serait
 bornée.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|p_n\|_\infty = 1$, $|p_n(0)| = 0$, et $\|p_n'\|_\infty = n$, donc $\frac{\|p_n\|}{\|p_n\|_\infty} = n$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{\|p_n\|}{\|p_n\|_\infty}\right)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée,

donc les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $(\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0,

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n\pi^2 (\cos(n\pi t))^2} dt$, ce qui, d'après le même raison-

nement qu'en IV.3, est supérieur ou égal à $\pi\sqrt{n} \int_0^1 |\cos(\pi nt)| dt$.

Mais la fonction $t \mapsto |\cos(\pi nt)|$ est $\frac{1}{n}$ -périodique, donc $\int_0^1 |\cos(\pi nt)| dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} |\cos(\pi nt)| dt$.

La courbe représentative de $t \mapsto |\cos(\pi nt)|$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $t = \frac{1}{2n}$,

donc $\int_0^{\frac{1}{n}} |\cos(\pi nt)| dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2n}} \cos(\pi nt) dt = \frac{2}{\pi n}$, donc $\int_0^1 |\cos(\pi nt)| dt = \frac{2}{\pi}$, donc

$$\boxed{I_n \geq 2\sqrt{n}}.$$

C'est un peu mieux que ce que demande l'énoncé !

(c) La longueur de la courbe représentative de la fonction nulle sur $[0, 1]$ est 1.

Dans l'espace vectoriel normé $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ du V.2.1 converge donc vers la fonction nulle, mais la suite $(L(f_n))_{n \geq 1}$ ne converge pas vers l'image par L de la fonction nulle, donc L n'est pas continue.

C'est ce qui motive les réserves que j'ai apportées au III.1.

(d) Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de E_1 qui, au sens de $\|\cdot\|$, converge vers une fonction $h \in E_1$.

En particulier, $(\|h'_n - h'\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Il en résulte que d'une part la suite de fonctions $(h'_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers h' , et d'autre part que la suite $(\|h'_n\|_\infty)_{n \geq 1}$ possède un majorant A .

Ainsi :

- la suite des fonctions $\sqrt{1 + (h'_n)^2}$ converge simplement vers la fonction $\sqrt{1 + h^2}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sqrt{1 + (h'_n)^2} \right| \leq \sqrt{1 + A^2}$, et la fonction constante $t \mapsto \sqrt{1 + A^2}$ est intégrable sur l'intervalle borné $[0, 1]$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, la suite $(L(h_n))_{n \geq 1}$ converge vers $L(h)$.

Finalement, $\boxed{L \text{ est continue sur } (E_1, \|\cdot\|)}$.