

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

On se propose d'étudier quelques propriétés des applications linéaires inversibles de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n ainsi que de leurs matrices.

Dans tout ce qui suit, \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) est supposé muni de sa base canonique ordonnée $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$, $e_i = (\delta_1^i, \dots, \delta_n^i)$, δ_i^j désignant le symbole de Kronecker ($\delta_i^j = 1$ si $i = j$ et $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$).

On choisit sur \mathbb{R}^n la norme euclidienne usuelle : $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n .

Alors, $\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : « $\mathcal{M}(f)$ est la matrice de f relativement à \mathcal{B}_n », est un isomorphisme d'algèbre de $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \circ)$ sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$, où $+$ désigne l'addition, \cdot désigne la multiplication par les scalaires, \circ la composition des applications et \times le produit matriciel.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ sera la norme subordonnée de f associée à $\|\cdot\|_2$, on notera aussi $\|\cdot\|$ la norme transportée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par \mathcal{M} , c'est-à-dire que $\|M\| = \|\mathcal{M}^{-1}(M)\|$ ($M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

On rappelle que $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), +, \cdot, \circ, \|\cdot\|)$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times, \|\cdot\|)$ sont des **algèbres** de Banach unitaires et que \mathcal{M} est un isomorphisme isométrique de la première algèbre sur la seconde : de ce fait toutes les propriétés établies dans le texte sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se transposent immédiatement sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On notera I_n l'élément neutre de $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \circ)$ et J_n celui de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$.

On pose $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{Det} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, où $\det(f)$ désigne le déterminant de f et $\text{Det}(M) = \det(\mathcal{M}^{-1}(M))$ est le déterminant de M .

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (\alpha_{i,j})$ signifie que $\alpha_{i,j}$ est le réel situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de M , $\alpha_{i,j}$ est une « entrée » de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M .

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on définit $L_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $L_k(M) = (\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,n})$ si $M = (\alpha_{i,j})$.

Si $L_k(M) \neq (0, \dots, 0)$ on notera $p(k) = \min\{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_{k,j} \neq 0\}$ et on dira que $\alpha_{k,p(k)}$ est « l'entrée principale » de $L_k(M)$.

Dans tout le problème, on appelle « groupe linéaire d'ordre n », et on note $GL(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble suivant : $GL(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : (\exists g)((g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ et } (g \circ f = I_n))\}$, (i.e. $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f possède une « inverse linéaire à gauche »); de même $GL_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(GL(\mathbb{R}^n))$ sera le « groupe matriciel d'ordre n ».

La partie II est autonome ; la partie III peut se traiter en admettant II.3.4.

I. On se propose, dans cette partie, d'établir les résultats de base relatifs aux groupes linéaires et matriciels.

1) Montrer que $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si f est une bijection linéaire de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n , (donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est autre que l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n) et que $(GL(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ sont bien des groupes; si $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ et si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on notera f^{-1} et M^{-1} leurs inverses dans ces groupes.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on définit $(f^p)_{p \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par $f^0 = I_n$, $f^{p+1} = f^p \circ f$; on rappelle que si $\|f\| < 1$, alors $I_n - f \in GL(\mathbb{R}^n)$ et $(I_n - f)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} f^i$.

2.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^p$ montrer que : $\|f_1 \circ \dots \circ f_p\| \leq \|f_1\| \dots \|f_p\|$ et en déduire que $(f_1, \dots, f_p) \mapsto f_1 \circ \dots \circ f_p$ est continue (donc $(M_1, \dots, M_p) \mapsto M_1 \times \dots \times M_p$ est continue avec $(M_1, \dots, M_p) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$).

2.2a. Soit $f \in GL(\mathbb{R}^n)$, montrer que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\|g\| < \|f^{-1}\|^{-1}$, on a : $f + g \in GL(\mathbb{R}^n)$ (on aura intérêt à écrire : $f + g = f \circ (I_n + f^{-1} \circ g)$).

2.2b. Montrer que : $(f + g)^{-1} - f^{-1} = ((I_n + f^{-1} \circ g)^{-1} - I_n) \circ f^{-1}$ et en déduire que $f \mapsto f^{-1}$ est continue (donc $M \mapsto M^{-1}$ est continue).

3) a. Montrer que Det est une application continue; en déduire qu'il en est de même pour \det .

b. On définit $GL_+(\mathbb{R}^n)$, $GL_-(\mathbb{R}^n)$, $GL_{n+}(\mathbb{R})$, $GL_{n-}(\mathbb{R})$ comme suit :

$$GL_+(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : \det(f) > 0\}, \quad GL_-(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : 0 > \det(f)\}$$

$$GL_{n+}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \text{Det}(M) > 0\}, \quad GL_{n-}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : 0 > \text{Det}(M)\}.$$

Montrer que $GL(\mathbb{R}^n) = GL_+(\mathbb{R}^n) \cup GL_-(\mathbb{R}^n)$ (donc $GL_n(\mathbb{R}) = GL_{n+}(\mathbb{R}) \cup GL_{n-}(\mathbb{R})$).

Montrer que $GL_+(\mathbb{R}^n)$, $GL_-(\mathbb{R}^n)$ sont ouverts (donc $GL_{n+}(\mathbb{R})$ et $GL_{n-}(\mathbb{R})$ sont ouverts).

4) Montrer que $(GL_+(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $(GL_{n+}(\mathbb{R}), \times)$ sont des sous-groupes de $(GL(\mathbb{R}^n), \circ)$ et $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
Qu'en est-il de $GL_-(\mathbb{R}^n)$ et $GL_{n-}(\mathbb{R})$?

5) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on définit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $u(t) = \det(f + t.I_n)$.

5.1 Montrer que u est une fonction polynomiale de degré n .

5.2 Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tel que l'on ait : $\{f + t.I_n : t \in]0, \alpha[\} \subset GL(\mathbb{R}^n)$. En déduire que $GL(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (donc $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

II. Dans cette partie, on montre comment on peut calculer l'inverse d'un élément de $GL_n(\mathbb{R})$ en utilisant des « transformations élémentaires » sur les lignes des matrices.

Définitions :

1- Soit $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dira que M est « L - réduite » si et seulement si :

1) soit M est la matrice nulle (notée $0_{\mathcal{M}_n}$),

2) soit, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $L_k(M) \neq (0, \dots, 0)$ alors $\alpha_{k,p(k)} = 1$ et $\sum_{j=1}^n |\alpha_{j,p(k)}| = 1$ (où $\alpha_{k,p(k)}$ est « l'entrée principale » de $L_k(M)$).

$$2- \mathcal{E}l_1(n) = \bigcup_{(k,\lambda) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{R}^*} \{A_{1,k,\lambda}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ où } A_{1,k,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \text{ étant}$$

à la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne.

$$((L_i(A_{1,k,\lambda}) = e_i \text{ si } i \neq k, L_k(A_{1,k,\lambda}) = \lambda e_k)$$

3- $\mathcal{E}l_2(n) = \bigcup_{((k,p),\lambda) \in \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} (\{i\} \times (\{1, \dots, n\} \setminus \{i\})) \right) \in \mathbb{R}}$ $\{A_{2,k,p,\lambda}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $A_{2,k,\lambda}$ s'écrit :

$$A_{2,k,p,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & & \\ \vdots & & & 0 & & & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \lambda \text{ étant à la } k^{\text{ième}} \text{ ligne et la } p^{\text{ième}} \text{ colonne.}$$

$$((L_i(A_{2,k,p,\lambda}) = e_i \text{ si } i \neq k, L_k(A_{2,k,p,\lambda}) = e_k + \lambda e_p)$$

$$4- \mathcal{E}l_3(n) = \bigcup_{(k,p) \in \{1, \dots, n\}^2} \{A_{3,k,p}\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } A_{3,k,p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(L_i(A_{3,k,p}) = e_i \text{ si } i \notin \{k, p\}, L_k(A_{3,k,p}) = e_p, L_p(A_{3,k,p}) = e_k)$$

On définit alors $\mathcal{E}l(n) = \bigcup_{i \in \{1,2,3\}} \mathcal{E}l_i(n)$, un élément de $\mathcal{E}l(n)$ s'appelle une matrice élémentaire d'ordre n ,

de type i s'il appartient à $\mathcal{E}l_i(n)$

5- On appelle opération élémentaire de type 1, 2 ou 3 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{T}_{1,k,\lambda}, \mathcal{T}_{2,k,p,\lambda}, \mathcal{T}_{3,k,p}, ((k,p) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda \in \mathbb{R})$ toute application (de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) du type :

$$\mathcal{T}_{1,k,\lambda}(M) = A_{1,k,\lambda} \times M; \mathcal{T}_{2,k,p,\lambda}(M) = A_{2,k,p,\lambda} \times M; \mathcal{T}_{3,k,p}(M) = A_{3,k,p} \times M;$$

avec $A_{1,k,\lambda} \in \mathcal{E}l_1(n), A_{2,k,p,\lambda} \in \mathcal{E}l_2(n)$ et $A_{3,k,p} \in \mathcal{E}l_3(n)$.

On définit alors :

$$\mathcal{O}_1(n) = \{\mathcal{T}_{1,k,\lambda} : A_{1,k,\lambda} \in \mathcal{E}l_1(n)\}, \mathcal{O}_2(n) = \{\mathcal{T}_{2,k,p,\lambda} : A_{2,k,p,\lambda} \in \mathcal{E}l_2(n)\}, \mathcal{O}_3(n) = \{\mathcal{T}_{3,k,p} : A_{3,k,p} \in \mathcal{E}l_3(n)\},$$

$$\mathcal{O}(n) = \bigcup_{i \in \{1,2,3\}} \mathcal{O}_i(n) \text{ est l'ensemble des opérations élémentaires sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

6- Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on dira que N est « L - équivalente » à M s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathcal{T}^{(1)}, \dots, \mathcal{T}^{(q)}) \in (\mathcal{O}(n))^q$ tels que : $N = (\mathcal{T}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(2)} \circ \dots \circ \mathcal{T}^{(q)})(M)$.

1) Soit $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\mathcal{T}_{1,k,\lambda}(M), \mathcal{T}_{2,k,p,\lambda}(M), \mathcal{T}_{3,k,p}(M)$ et donner une interprétation simple des opérations élémentaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\text{Det}(A_{1,k,\lambda}), \text{Det}(A_{2,k,p,\lambda}), \text{Det}(A_{3,k,p})$ et montrer que $\mathcal{E}l(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Calculer $(A_{1,k,\lambda})^{-1}, (A_{2,k,p,\lambda})^{-1}, (A_{3,k,p})^{-1}$ et en déduire que la « L - équivalence » est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est « L - équivalente » à M , alors $N \in GL_n(\mathbb{R})$.

3) On se propose de montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est « L - équivalent » à une matrice « L - réduite » et ce, en utilisant uniquement des opérations élémentaires de type 1 ou 2.

Soit $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on suppose que $M \neq 0_{\mathcal{M}_n}$, on suppose que pour k donné, $k \in \{1, \dots, n\}$, on a pu trouver $(\mathcal{T}^{(1)}, \dots, \mathcal{T}^{(q(k))}) \in (\mathcal{O}_1(n) \cup \mathcal{O}_2(n))^{q(k)}$ tel que $M_{(k)} = (\mathcal{T}^{(1)} \circ \dots \circ \mathcal{T}^{(q(k))})(M) = (\alpha'_{i,j})$ vérifie la propriété $(P(k))$.

$(P(k))$: pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, soit $L_i(M_{(k)}) = (0, \dots, 0)$, soit $\alpha'_{i,p(i)} = 1$ et $\sum_{j=1}^n |\alpha'_{j,p(i)}| = 1$ ($\alpha'_{i,p(i)}$)

étant « l'entrée principale » de $L_i(M_{(k)})$.

Si pour tout $i \in \{k+1, \dots, n\}$ on a $L_i(M_{(k)}) = (0, \dots, 0)$ alors $M_{(k)}$ est « L - réduite », de même si $k = n$; de plus M et $M_{(k)}$ sont « L - équivalentes » par des opérations élémentaires de type 1 ou 2. Si $M_{(k)}$ est « L - réduite » c'est fini, sinon soit $m(k) = \min \{i \in \{k+1, \dots, n\} : L_i(M_{(k)}) \neq (0, \dots, 0)\}$.

3.1 Montrer qu'il existe $\mathcal{T}_{1,m(k),\lambda} \in \mathcal{O}_1(n)$ tel que l'on ait : $\mathcal{T}_{1,m(k),\lambda}(M_{(k)}) = M'_{(k)} = (\alpha'_{i,j})$ vérifie $(P(k))$ et $\alpha'_{m(k),p(m(k))} = 1$ (où $\alpha'_{m(k),p(m(k))}$ est « l'entrée principale » de $L_{m(k)}(M'_{(k)})$).

3.2 Soit $\{i_1, \dots, i_{n-1}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{m(k)\}$, montrer qu'il existe $(\mathcal{T}_{2,i_j,m(k),\lambda_{i_j}})_{j \in \{1, \dots, i_{n-1}\}}$ tel que l'on ait : $M_{(m(k))} = \mathcal{T}_{2,i_1,m(k),\lambda_{i_1}} \circ \dots \circ \mathcal{T}_{2,i_{n-1},m(k),\lambda_{i_{n-1}}}(M'_{(k)})$ vérifie $(P(m(k)))$. Montrer que ceci établit le résultat énoncé au début du II.3.

3.3 On s'intéresse à l'algorithme permettant de calculer les entrées de $M_{(m(k))}$ à partir de la donnée de celles de $M_{(k)}$. On pose, pour simplifier l'écriture, $M_{(k)} = (a_{i,j}), m(k) = m, M_{(m(k))} = (b_{i,j})$; expliciter les formules permettant le calcul des $b_{i,j}$ à partir des $a_{i,j}$.

3.4 Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que, si M est « L - réduite », il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathcal{T}_{3,k_i,p_i})_{i \in \{1, \dots, q\}} \in (\mathcal{O}_3(n))^q$ tels que $(\mathcal{T}_{3,k_1,p_1} \circ \mathcal{T}_{3,k_2,p_2} \circ \mathcal{T}_{3,k_q,p_q})(M) = J_n$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si M est un produit d'éléments de $\mathcal{E}l(n)$.

III. Nous allons montrer que $GL_{n+}(\mathbb{R}), GL_{n-}(\mathbb{R}), GL_+(\mathbb{R}^n), GL_-(\mathbb{R}^n)$ sont connexes par arcs. Il s'agit d'un résultat important et non évident, bien qu'élémentaire.

A. Soit $M \in GL_{n+}(\mathbb{R})$, d'après II.3.4, il existe $(B_i)_{i \in \{1, \dots, m\}} \in (\mathcal{E}l(n))^m$ tel que l'on ait :
 $M = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$.

1) Montrer que $\{i \in \{1, \dots, m\} : B_i \in GL_{n-}(\mathbb{R})\}$ possède un nombre pair d'éléments.

2) **2.1** Soit $A_{1,k,\lambda} \in \mathcal{E}l_1(n) \cap GL_{n+}(\mathbb{R})$, soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(t) = A_{1,k,(1-t)\lambda+t}$.
Montrer que φ est continue, que $\varphi([0, 1]) \subset GL_{n+}(\mathbb{R})$ et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$.

2.2 Soit $A_{1,k,\lambda} \in \mathcal{E}l_1(n) \cap GL_{n-}(\mathbb{R})$, soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \psi(t) = A_{1,k,(1-t)\lambda-t}$.
Montrer que ψ est continue, que $\psi([0, 1]) \subset GL_{n-}(\mathbb{R})$ et calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

3) Soit $A_{2,k,p,\lambda} \in \mathcal{E}l_2(n)$, soit $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \chi(t) = A_{2,k,p,(1-t)\lambda}$.
Montrer que χ est continue, que $\chi([0, 1]) \subset GL_{n+}(\mathbb{R})$, et calculer $\chi(0)$ et $\chi(1)$.

4) Soit $A_{3,k,p} \in \mathcal{E}l_3(n), (k \neq p)$, soit $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$L_i(\omega(t)) = e_i \text{ si } i \notin \{k, p\}$$

$$L_k(\omega(t)) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_k + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_p$$

$$L_p(\omega(t)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_p + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).e_k$$

Montrer que ω est continue, que $\omega([0, 1]) \subset GL_{n-}(\mathbb{R})$, et calculer $\omega(0)$ et $\omega(1)$.

5) En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe $\sigma, \sigma : [0, 1] \rightarrow GL_{n+}(\mathbb{R}), \sigma$ continue, telle que l'on ait : $\sigma(0) = M$ et $L_i(\sigma(1)) = \varepsilon_i.e_i, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $\{i \in \{1, \dots, n\} : \varepsilon_i = -1\}$ possède un nombre pair d'éléments.

6) Soit $\{p, k\} \subset \{1, \dots, n\}, p \neq k$, soit $N_{(p,k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec :

$$L_i(N_{(p,k)}) = e_i \text{ si } i \notin \{p, k\}$$

$$L_k(N_{(p,k)}) = -e_k,$$

$$L_p(N_{(p,k)}) = -e_p.$$

Soit $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$L_i(\rho(t)) = e_i \text{ si } i \notin \{p, k\}$$

$$L_k(\rho(t)) = -\cos(\pi t).e_k + \sin(\pi t).e_p$$

$$L_p(\rho(t)) = -\cos(\pi t).e_p - \sin(\pi t).e_k$$

Montrer que ρ est continue, que $\rho([0, 1]) \in GL_{n+}(\mathbb{R})$, et calculer $\rho(0)$ et $\rho(1)$.

7) En utilisant III.A.5 et III.A.6, montrer qu'il existe $\mu, \mu : [0, 1] \rightarrow GL_{n+}(\mathbb{R}), \mu$ continue, telle que l'on ait $\mu(0) = M, \mu(1) = J_n$. Déduire de ceci que $GL_{n+}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc $GL_+(\mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs).

B. Soit $M \in GL_{n-}(\mathbb{R})$, montrer, en s'inspirant de III.A qu'il existe $\nu, \nu : [0, 1] \rightarrow GL_{n-}(\mathbb{R}), \nu$ continue, telle que l'on ait $\nu(0) = M, \nu(1) = A_{1,1,-1}$.

Déduire de ceci que $GL_{n-}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (donc $GL_-(\mathbb{R}^n)$ est connexe par arcs).