

## CENTRALE 2002 (PSI 2)

### Partie I - Matrices tridiagonales

**I.A.1)**  $(S_2)$  s'écrit  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ . Le premier pivot est  $p_0 = \alpha_1 = 2$  et  $(S_2)$  est équivalent à

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - 1/2 \beta_1 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ . Le deuxième pivot est  $p_1 = \alpha_2 - \frac{1}{p_0} = \frac{7}{2}$  et  $(S_2)$  est équivalent à

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - 1/2 \beta_1 \\ \beta_3 - 2/7 (\beta_2 - 1/2 \beta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - 1/2 \beta_1 \\ \beta_3 - 2/7 \beta_2 + 1/7 \beta_1 \end{pmatrix}$ . Le troisième pivot est donc

$$p_2 = \alpha_3 - \frac{1}{p_1} = \frac{12}{7}.$$

Le système se résout en  $\begin{cases} x_3 = 1/12 \beta_1 - 1/6 \beta_2 + 7/12 \beta_3 \\ x_2 = -1/6 \beta_1 + 1/3 \beta_2 - 1/6 \beta_3 \\ x_1 = 7/12 \beta_1 - 1/6 \beta_2 + 1/12 \beta_3 \end{cases}$ , soit  $X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} B$ .

**I.A.2) a)** Pour  $k$  de 1 à  $n$  faire  
début

$$p \leftarrow m[k, k]$$

$$m[k+1, k] \leftarrow 0$$

Pour  $j$  de  $k+1$  à  $n+1$  faire  $m[k+1, j] \leftarrow m[k+1, j] - \frac{m[k, j]}{p}$

$$b[k+1] \leftarrow b[k+1] - \frac{b[k]}{p}$$

fin

Pour  $k$  de  $n+1$  à 1 faire

début

$$x[k] \leftarrow b[k]$$

Si  $k < n+1$  alors Pour  $j$  de  $k+1$  à  $n+1$  faire  $x[k] \leftarrow x[k] - m[k, j] * x[j]$

$$x[k] \leftarrow \frac{x[k]}{m[k, k]}$$

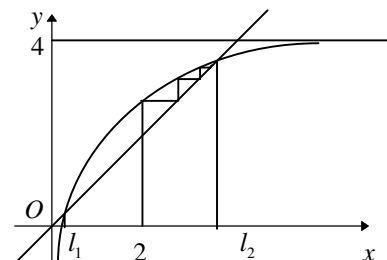
fin

**b)**  $p_0 = \alpha_1 = 2$ .

Pour  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , le pivot  $p_k$  est calculé par la boucle d'indice  $k+1$  et vaut  $m[k+1, k+1]$ ; ce coefficient a lui-même été calculé par la boucle précédente :  $m[k+1, k+1] \leftarrow m[k+1, k+1] - \frac{m[k, k+1]}{p}$  où  $p$  représente le pivot  $p_{k-1}$ . Comme la ligne d'indice  $k+1$  n'a pas été modifiée par les  $k-1$  premières boucles, on a

$$\text{bien } \begin{cases} \text{si } k \leq n-1, & p_k = 4 - \frac{1}{p_{k-1}} \\ \text{si } k = n, & p_n = 2 - \frac{1}{p_{n-1}} \end{cases}.$$

**c)** Le graphe de la fonction  $y = 4 - \frac{1}{x}$  est une hyperbole; il s'agit d'une fonction croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; le graphe coupe la première



bissectrice aux points d' abscisse  $l_1$  et  $l_2$  racines de  $X^2 - 4X + 1 = 0$  soit  $l_1 = 2 - \sqrt{3}$  et  $l_2 = 2 + \sqrt{3}$ . Par monotonie de la fonction, l' intervalle  $[2, l_2[$  est stable et sur cet intervalle,  $4 - \frac{1}{x} > x$ . Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée et par conséquent converge vers la seule limite possible  $l_2 = 2 + \sqrt{3}$ .

**d)** Puisque  $u_n \in [2, 2 + \sqrt{3}[ \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_k \in [2, 2 + \sqrt{3}[ \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ . De plus,  $u_n > 2$  et  $p_n = u_n - 2 > 0$ . Donc  $A_{n+1}$  est inversible.

**I. B. 1)**  $\det C_n = 4 \det C_{n-1} - \det C_{n-2}$  (en développant par rapport à la dernière ligne), c' est à dire  $c_n = 4c_{n-1} - c_{n-2} \quad \forall n \geq 3$ . Cette relation de récurrence reste valable pour  $n=2$  compte tenu de la convention pour  $c_0$ . Elle admet comme solution générale  $\alpha l_1^n + \beta l_2^n$  et pour trouver  $c_n$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  doivent vérifier

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha l_1 + \beta l_2 = 4 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{ d' où } c_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[ (2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1} \right].$$

En développant suivant la première colonne, on en déduit, pour  $n \geq 3$ ,  $b_n = 2c_{n-1} - c_{n-2} = \frac{1}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right]$ , formule qui reste valable pour  $n = 1$  et  $n = 2$  (calcul direct avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Puis, pour } n \geq 3, a_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ (2 + \sqrt{3})^{n-1} - (2 - \sqrt{3})^{n-1} \right] = 3c_{n-2}.$$

**I. B. 2)** Pour  $n \geq 3$ ,  $(2 + \sqrt{3})^{n-1} \neq (2 - \sqrt{3})^{n-1}$ . Donc  $a_n \neq 0$  et  $A_n$  est inversible.

$$\text{I. B. 3) } \det(A_3 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 6), \text{ d' où } \text{Sp}(A_3) = \{2, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\}.$$

$$\det(C_3 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14), \text{ d' où } \text{Sp}(C_3) = \{4, 4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}\}.$$

$$\text{I. B. 4) } M_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \lambda I = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \alpha_3 - \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_n - \lambda \end{pmatrix}. \text{ Supposons que cette matrice ne soit}$$

pas inversible et soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un vecteur non nul du noyau ; soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$ . On

$$\text{aurait alors } \begin{cases} x_{i-1} + (\alpha_i - \lambda)x_i + x_{i+1} = 0 & \text{si } i \in \{2, \dots, n-1\} \\ (\alpha_1 - \lambda)x_1 + x_2 = 0 & \text{si } i = 1 \\ x_{n-1} + (\alpha_n - \lambda)x_n = 0 & \text{si } i = n \end{cases} \text{ d' où } \begin{cases} |\alpha_i - \lambda| = \left| \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} \right| \leq 2 & \text{pour } i \neq 1 \text{ et } i \neq n \\ |\alpha_1 - \lambda| = \left| \frac{x_2}{x_1} \right| \leq 1 \\ |\alpha_n - \lambda| = \left| \frac{x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 1 \end{cases}$$

ce qui contredit le choix de  $\lambda$ .

Donc  $M_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \lambda I$  est inversible.

**b)** Par suite,  $\lambda$  ne peut être valeur propre que si l' une des conditions **dua**) n' est pas satisfaite, d' où  $\text{Sp}(M_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \subset [\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left( \bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$ .

Dans le cas des matrices  $A_n, B_n$  et  $C_n$ , on a donc  $\text{Sp}(A_n) \subset [1,6]$ ,  $\text{Sp}(B_n) \subset [1,6]$  et  $\text{Sp}(C_n) \subset [2,6]$  et 0 n'est valeur propre d'aucune des trois matrices ; on retrouve ainsi qu'elles sont inversibles.

## Partie II - Fonctions splines cubiques

**II. A.** Une fonction  $f$  de classe  $C^2$  est dans  $S$  si et seulement si  $f'$  (qui est continue) est affine par morceaux relativement à la subdivision  $(x_k)$ . La fonction  $f'$  admet donc en chaque point  $x_k$  ( $k \leq n-1$ ) une dérivée à droite, et inversement, une fonction continue affine par morceaux est déterminée de manière unique par la donnée de sa valeur en 0 et de ses dérivées à droite aux points de subdivision. La donnée supplémentaire de  $f(0)$  et  $f'(0)$  permet de caractériser  $f$  de manière unique.

L'application proposée, manifestement linéaire, est donc un isomorphisme  $\dim S = n + 3$ .

**II. B. 1) a)** La condition (i) se traduit par le fait que  $g'$  est affine sur  $[x_{i-1}, x_i]$  et la condition (iii) impose les points de raccord des segments du graphe de  $g'$ . Ces deux conditions garantissent donc l'unicité d'une fonction telle que  $g' \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$  sur chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ .

Soit  $\Gamma_i$  la primitive seconde de  $\gamma$  sur  $[x_{i-1}, x_i]$  telle que  $\Gamma_i(x_{i-1}) = \Gamma_i'(x_{i-1}) = 0$ . En modifiant  $\Gamma_i$  par addition d'une fonction affine convenable  $x \mapsto \alpha_i x + \beta_i$ , on peut faire en sorte que  $\begin{cases} \Gamma_i(x_{i-1}) + \alpha_i x_{i-1} + \beta_i = f(x_{i-1}) \\ \Gamma_i(x_i) + \alpha_i x_i + \beta_i = f(x_i) \end{cases}$ , le couple  $(\alpha_i, \beta_i)$  étant alors uniquement déterminé par un système de Cramer. La fonction  $x \mapsto \Gamma_i(x) + \alpha_i x + \beta_i$  coïncide alors nécessairement avec la fonction  $g$  sur  $[x_{i-1}, x_i]$  ce qui prouve l'existence et l'unicité de

**b)** La fonction  $g$  proposée vérifie  $g''(x) = m_{i-1} \frac{x_i - x}{h} + m_i \frac{x - x_{i-1}}{h} \quad \forall x \in ]x_{i-1}, x_i[$ . Les conditions (i)

et (iii) sont donc satisfaites. La condition (ii) sera satisfaite si  $\begin{cases} f(x_{i-1}) = m_{i-1} \frac{h^2}{6} + v_i \\ f(x_i) = m_i \frac{h^2}{6} + u_i h + v_i \end{cases}$  soit

$\begin{cases} v_i = f(x_{i-1}) - m_{i-1} \frac{h^2}{6} \\ u_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6} h \end{cases}$ . Dès lors l'unicité montrée en a) prouve que la fonction proposée est bien

celle qui est définie en a).

**II. B. 2)** Cette fonction sera dans  $S$  si elle est de classe  $C^2$ . Or on sait déjà qu'elle est continue (car continue à droite et à gauche en chaque  $x_i$ ). Elle admet en chaque  $x_i$  des dérivées à gauche et à droite définies par

$\begin{cases} g'_g(x_i) = m_i \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2h} + u_i = \frac{m_i h}{2} + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6} h \\ g'_d(x_i) = -m_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2h} + u_{i+1} = -\frac{m_i h}{2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{m_{i+1} - m_i}{6} h \end{cases}$ . La fonction  $g$  sera dérivable en  $x_i$  si

et seulement si  $g'_g(x_i) = g'_d(x_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  soit

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{6}{h^2} (f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (e_i)$$

Si cette condition est satisfaite,  $g$  sera de classe  $C^1$  au voisinage de  $x_i$  car  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]x_{i-1}, x_i[$  et sur  $]x_i, x_{i+1}[$ . Alors, comme  $g'$  a même limite à droite et à gauche en  $x_i$ ,  $g$  sera de classe  $C^2$  en  $x_i$ . En résumé, si les conditions  $(e_i)$  sont satisfaites pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $g$  sera de classe  $C^2$  sur  $[0,1]$  et sera donc dans  $S$ .

Enfin,

$$g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow -\frac{m_0 h}{2} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{m_1 - m_0}{6} h = f'(0) \Leftrightarrow 2m_0 + m_1 = \frac{6}{h} \left( f'(0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \right)$$

$$g'(1) = f'(1) \Leftrightarrow \frac{m_n h}{2} + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} - \frac{m_n - m_{n-1}}{6} h = f'(1) \Leftrightarrow m_{n-1} + 2m_n = \frac{6}{h} \left( f'(1) - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} \right).$$

$$\text{On a donc montré l' équivalence } \begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \Leftrightarrow A_{n+1} M = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f(x_1) - f(x_0) - hf'(0) \\ f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) \\ \vdots \\ f'(x_{n-2}) - 2f'(x_{n-1}) + f'(x_n) \\ f(x_{n-1}) - f(x_n) + hf'(1) \end{pmatrix}.$$

**II. B. 3)** Puisque la matrice  $A_{n+1}$  est inversible, il existe un unique vecteur  $M$  tel que la fonction  $g$  de **II. B. 1)** soit dans  $S$  et vérifie  $g'(0) = f'(0)$  et  $g'(1) = f'(1)$ , d' où l' existence et l' unicité vérifiant les conditions imposées ici.

**II. B. 4)** Le morphisme  $\begin{cases} S \rightarrow \mathbb{R}^{n+3} \\ f \mapsto (f(x_0), \dots, f(x_n), f'(0), f'(1)) \end{cases}$  est donc injectif. De plus pour tout  $(a_0, \dots, a_n, a'_0, a'_1) \in \mathbb{R}^{n+3}$ , on peut faire le raisonnement précédent en remplaçant  $f(x_i)$  par  $a_i$ ,  $f'(0)$  par  $a'_0$  et  $f'(1)$  par  $a'_1$ , d' où la surjectivité du morphisme. Donc  $\dim S = n + 3$ .

**II. C. 1)** Notons  $P_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$  et  $P(X) = \sum_{i=0}^n f(x_i) P_i(X)$ .  $P$  est un polynôme de degré  $n$  vérifiant

$$P(x_j) = f(x_j) \quad \text{pour tout } j \in \{0, \dots, n\}. \quad \text{Notons encore } Q(X) = X^2 \prod_{j=1}^n (X - x_j) \quad \text{et}$$

$$R(X) = (X - 1)^2 \prod_{j=0}^{n-1} (X - x_j). \quad \text{Alors } Q'(0) = R'(1) = 0 \quad \text{et } Q'(1) \neq 0, \quad R'(0) \neq 0. \quad \text{Le polynôme}$$

$$h(X) = P(X) + \frac{f'(0) - P'(0)}{R'(0)} R(X) + \frac{f'(1) - P'(1)}{Q'(1)} Q(X) \quad \text{est un polynôme de degré } n + 2 \text{ satisfaisant aux}$$

conditions.

**II. C. 2)** Pour  $n = 1$ , les deux méthodes d' approximation coïncident.

Pour  $n \geq 2$ , Le calcul de l' approximation de Lagrange-Sylvester se fait sans passer par la résolution d' un système linéaire. En contrepartie, le degré 3 de l' approximation par des fonctions splines cubiques rend les calculs à mener à l' aide de cette approximation nettement plus simples.

En ce qui concerne la précision, tout dépend de la variation de  $\|f^{(n)}\|_\infty$  en fonction de  $n$ . Le cas d' une

fonction telle que  $x \mapsto x^{2n}$  montre que  $\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+3)!}$  augmente au moins jusqu' au rang  $n - 2$ .

### Partie III - Un exemple de structure euclidienne

**III. A. 1)**  $(P, Q) \mapsto (P / Q)$  est évidemment une forme bilinéaire symétrique.

$$(P / P) = \sum_{i=0}^n P(i)^2 \geq 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

$(P / P) = 0$  n' est possible que si  $P(i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$ , d' où  $P = 0$  car un polynôme non nul de  $\mathbb{R}_n[X]$  ne peut pas s' annuler en  $n + 1$  points distincts.

On a donc bien défini un produit scalaire.

**III. A. 2)** Notons  $L_i(X) = \sum_{j=0}^n l_{ij} X^j$ . Pour  $i$  fixé, les coefficients  $l_{ij}$ ,  $j \in \{0, \dots, n\}$  vérifient un système linéaire dont le déterminant est le déterminant de Vandermonde. Donc pour tout  $i$ , le polynôme  $L_i$  existe et est unique.

$$\text{On peut l' écrire } L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - j}{i - j}.$$

$$(L_i / L_j) = \sum_{k=0}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}. \quad \text{Donc } \{L_i\}_{i=1, \dots, n} \text{ est une base orthonormée } \mathcal{B}.$$

$$L_0(X) = \prod_{j=1}^n \frac{X - j}{-j} = (-1)^n \frac{\prod_{j=1}^n (X - j)}{n!}. \quad \text{Donc } X^n + (-1)^{n+1} n! L_0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

**III. A. 3)** De même,  $L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X-j}{i-j} = (-1)^{n-i} \frac{\prod_{j \neq i} (X-j)}{i!(n-i)!}$ . Donc  $X^n + (-1)^{n-i+1} i!(n-i)! L_i \in \mathcal{R}_{n-1}[X]$ . Par

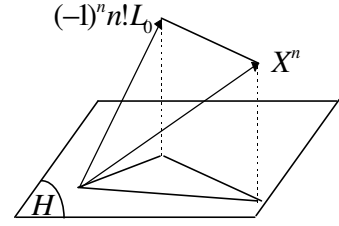
suite,  $(N / X^n + (-1)^{n-i+1} i!(n-i)! L_i) = 0$  et la  $i$ -ème coordonnée de  $N$  dans

la base  $\mathcal{B}$  est  $(N / L_i) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \sum_{k=0}^n N(k) k^n$ .

Comme  $X^n + (-1)^{n+1} n! L_0 \in H$ ,

$$d(X^n, H) = d((-1)^n n! L_0, H) = n! d(L_0, H).$$

**III. A. 4)**  $(1+X)^{2n} = (1+X)^n (1+X)^n \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{2n} C_{2n}^p X^p = \sum_{p=0}^n C_n^p X^p \sum_{p=0}^n C_n^p X^p$ .



En comparant les termes de degré  $n$ , il vient  $C_{2n}^n = \sum_{p=0}^n C_n^p C_n^{n-p} = \sum_{p=0}^n (C_n^p)^2$ .

**III. A. 5)** Soit  $N_0$  le vecteur de composantes  $\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}$  dans la base  $(L_i)$  d'après **3)**,  $H^\perp \subset \text{Vect}(N_0)$ . Alors

$$d(L_0, H) = \frac{|(L_0 / N)|}{\|N\|} = \frac{1/n!}{\sqrt{(1/n!)^2 \sum_{i=1}^n (C_n^i)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_{2n}^n}} \text{ et } d(X^n, H) = \frac{n!}{\sqrt{C_{2n}^n}}.$$

**III. B. 1)** L'identité de la division euclidienne s'écrit  $PM_0 = \Pi Q + R = \Pi Q + \varphi(P)$ . De même,  $P_1 M_0 = \Pi Q_1 + \varphi(P_1)$ , d'où  $(P + \lambda P_1) M_0 = \Pi(Q + \lambda Q_1) + \varphi(P) + \lambda \varphi(P_1)$ . Comme  $d^\circ(\varphi(P) + \lambda \varphi(P_1)) < d^\circ(\Pi)$ , on a bien  $\varphi(P + \lambda P_1) = \varphi(P) + \lambda \varphi(P_1)$ .

**III. B. 2)** Décomposons  $\varphi(L_i)$  dans la base  $(L_j)$  :

$$\varphi(L_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j L_j \text{ avec } \alpha_j = [\varphi(L_i)](j) = L_i(j) M_0(j) - \Pi(j) Q(j) = \delta_{ij} M_0(j).$$

Par conséquent,  $\varphi(L_i) = M_0(i) L_i$ . Puisque la base orthonormée  $\mathcal{B}$  est formée de vecteurs propres pour  $\varphi$ , l'endomorphisme  $\varphi$  est auto-adjoint.

**III. B. 3)** Pour que l'endomorphisme auto-adjoint  $\varphi$  soit un endomorphisme orthogonal, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient égales à 1 ou -1, soit  $M_0(i) = \pm 1 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . L'endomorphisme  $\varphi$  est alors une symétrie orthogonale.

**III. B. 4)** Si  $P = \sum_{i=0}^n x_i L_i$ ,  $(\varphi(P) / P) = \sum_{i=0}^n x_i^2 M_0(i)$ . Donc  $(\varphi(P) / P) \leq \max_i M_0(i) \sum_{i=0}^n x_i^2$  et

$(\varphi(P) / P) \geq \min_i M_0(i) \sum_{i=0}^n x_i^2$ . Supposons que  $P \in B_E(0,1)$ ; si  $\max_i M_0(i) \geq 0$ ,  $(\varphi(P) / P) \leq \max_i M_0(i)$  et

cette borne est atteinte pour le polynôme  $L_{i_0}$  où  $i_0$  est l'indice réalisant le maximum de  $M_0(i)$ ; si  $\max_i M_0(i) \leq 0$ ,  $(\varphi(P) / P) \leq 0$  et cette borne est atteinte pour le polynôme nul.

Donc  $\max_{P \in B_E(0,1)} (\varphi(P) / P) = \max\left(0, \max_i M_0(i)\right)$ . De même (il suffit de remplacer  $M_0$  par  $-M_0$ ),

$$\min_{P \in B_E(0,1)} (\varphi(P) / P) = \min\left(0, \min_i M_0(i)\right).$$