ENAC 2018

Corrigé pour le contrôle a posteriori, rédigé par Pierre Abbrugiati, relu et amendé par Marc Tastet.

Q1 C)

Il suffit de réinjecter chaque expression proposée pour voir que la C) et seule la C) convient.
Remarque : en utilisant les techniques de résolution des équations différentielles linéaires homogènes on trouve que l'ensemble des solutions sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ de l'équation homogène associée à (E) est $\left\{x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \frac{A}{1-x^2} \text{ si } x<-1 \\ \frac{B}{1-x^2} \text{ si } -1<x<1 \\ \frac{B}{1-x^2} \text{ si } x>1 \end{array}\right. , \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Q2 D).

Base : (f_1, f_2, f_3) où $f_1 = x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1-x^2} \text{ si } x<-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$, $f_2 = x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1-x^2} \text{ si } -1<x<1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$, $f_3 = x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1-x^2} \text{ si } 1<x \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$.

Q3 C).

Même technique que pour la question 1. Comme on sait que deux solutions particulières diffèrent d'une solution homogène et que les candidats proposés ne diffèrent clairement pas d'une solution homogène, si on commence par tester la C), on n'a pas besoin de tester les autres. Bien sûr, la méthode de la variation des constantes donne aussi le même résultat.

Q4 $\emptyset$.

La question est mal formulée (« l'ensemble des solutions est de la forme $y(x) = \dots$ »), mais convenons que l'ENAC nous a habitués à bien pire.
Aucune réponse n'est correcte puisque sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ l'ensemble des solutions forme un sous-espace affine de dimension 3 et non pas 1 comme pour chaque réponse proposée.

Q5 B).

La question est mal formulée (il manque une quantification en n).
Même technique qu'à la question 1.
Plus rapidement : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\lambda\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\lambda = \mu = 1$) dont le polynôme caractéristique est $\left(X - \frac{1}{2}\right)(X-2) = X^2 - \frac{5}{2}X + 1$ donc d'après le cours sur les suites récurrentes linéaires doubles, les suites de la forme $(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont nulles si et seulement si $aX^2 + bX + c$ est un multiple de $X^2 - \frac{5}{2}X + 1$, ce qui ne laisse que la B).

Q6 B).

La même technique qu'à la question 1 permet encore de conclure.
Plus rapidement : une suite géometrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (R) si et seulement si q est racine du polynôme caractéristique $3X^2 - 2X - 5$ de (R), dont les racines sont $5/3$ et -1.

Q7 A).

Même technique qu'à la question 1, mais on ne teste que A) (car pour B), C) et D) la suite ne vérifie par (R)), et on teste seulement u_0 et u_1 (car pour A) la suite vérifie (R)).
On peut aussi, mais c'est plus long, déterminer λ et μ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda\left(\left(\frac{5}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en résolvant le système donné par les valeurs des deux premiers termes u_0 et u_1.

Q8 C).

Même technique qu'à la question 1 il suffit réduire au même dénominateur pour voir quelle est la bonne expression. Comme il existe une unique décomposition en éléments simples (DES), on peut s'arrêter dès qu'on trouve $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$. Si on connaît la forme théorique d'une DES, on élimine d'emblée A) et D) qui n'ont pas les bons facteurs au dénominateur.
On peut aussi trouver la DES à l'aide des techniques du cours.

Q9 A).

On intègre notre DES : $\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2} = \ln(x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x-1} + \mathbb{R}$ en notant $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ l'ensemble des primitives de f sur $]0,1[$.
Attention : on est ici sur l'intervalle $]0,1[$. Ainsi $x-1<0$ et $\ln(x-1)$ n'a pas de sens.
Bien sûr la technique de la question 1 permet de répondre (y compris hélas si on ne se rend pas compte que B) n'a pas de sens).

Q10 $\emptyset$.

Bin pareil mais cette fois c'est $\ln(1-x)$ qui n'a pas de sens.
Les primitives sont les $x \mapsto \ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$ et aucune n'est dans la liste.

Q11 B).

On calcule : $\left[\ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = -2\ln(2) + \ln(3) + \frac{1}{2} = \ln(\frac{1}{4}) + \ln(3) + \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$.
La formulation de l'énoncé présente une maladresse habituelle des QCM de l'ENAC dans lesquelles "en déduire" à un sens particulier : on ne déduit pas cela de la seule réponse "$\emptyset$" à la question 10 qui n'avait aucune proposition correcte, mais de la réponse correcte à la question 10 qui ne figurait pas dans les propositions.

Q12 C).

Simple application de la formule $\displaystyle\int \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z} + \mathbb{R}$ valable pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ici $z = -(1 + 2\boldsymbol{i}n)$.

Q13 D).

Dans cette question et la suivante, on ne voit pas trop l'intérêt de se restreindre à l'intervalle $]-\infty, 0[$: celui-ci n'évite même pas le pôle -1 de la fraction rationnelle ! Je pense que le $t<0$ est une coquille et qu'il faudrait lire $t>0$...
Sinon, même résolution qu'en 8 (donc la méthode de la question 1 permet de répondre), la DES est $f(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$.

Q14 C).

On intègre chaque élément simple comme dans la question 10. Les primitives sur $]-\infty, -1[$ sont les $x \mapsto \arctan(t) + \frac{1}{1+t} + C,\ C \in \mathbb{R}$, et expression analogue sur $]-1, 0[$ (avec une constante non nécessairement égale). Donc **une** primitive, parmi d'autres, est bien celle de la réponse C).
Et une fois encore la méthode de la question 1 permet de répondre (mais c'est plus long).

Q15 B).

Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$!
Une remarque sur les questions 15 à 17 : pour $n \geq 1$, l'intégrale I_n est impropre (ou du moins les intégrales qui interviennent pour trouver la relation de récurrence par IPP sont impropres) « même si ça ne se voit pas », ce qui rend ces questions hors-programme en sup !

Q16 A)B).

Enfin une question où tester les propositions n'est pas immédiat !
Les réponses A) et B) disent strictement la même chose ! Les applications $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)^n$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, on peut donc effectuer une IPP (enfin avec le programme de spé) qui donne pour $n \geq 1$ la relation $I_n = \frac{n}{2} I_{n-1}$, en utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$ (croissances comparées).

Q17 C).

$$I_n = \frac{n}{2} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2^2} I_{n-2} = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 1}{2^n} I_0 = \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Q18 B).

Maladresse du sujet : dans les questions 18 et 19 (mais pas 20), les séries sont notées $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ alors que cette expression devrait dénoter leur somme.
Ici on a $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ où $(u_n)_n = \left(\frac{n}{(-2)^n (n-1)!}\right)_n$. On a (par exemple) $u_n = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge absolument (comme série géométrique dont la raison a une valeur absolue strictement inférieure à 1). Par principe de comparaison, $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge absolument, et donc en particulier converge.
Ainsi A) et D) sont fausses et B) est vraie.

Quant à C), c'est une proposition qui n'a malheureusement strictement aucun sens. On imagine qu'il faut lire : « $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est convergente, or toute série convergente est absolument convergente, donc $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est absolument convergente » (mais ce n'est pas ce qui est écrit !), et qu'elle est donc (grossièrement) fausse.

Q19 $\emptyset$.

Ici on a $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ où $(u_n)_n = \left(\dfrac{\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)}{n^2}\right)_n$.

• On a $|u_n| \leq \frac{2}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{2}{n^2}$ converge absolument, donc $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge absolument.

• Pour tout entier n impair on a $\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2) = -1$, pour tout n multiple de 4 on a $\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2) = 0$ et pour tout n congru à 2 modulo 4 on a $\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2) = 2$. En séparant les termes impairs, les termes multiples de 4 et les autres, ce qui est loisible puisque les quatre séries convergent (absolument), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(4k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(2k+1)^2} = \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{-1}{16}\pi^2$$

sachant qu'on a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
Examinons maintenant les propositions qui nous sont faites :
A) n'a aucun sens. On imagine qu'il faut lire : « $u_n \to 0$, or toute série dont le terme général tend vers 0 converge, donc $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge » (mais ce n'est pas ce qui est écrit !), et qu'elle est donc (très) fausse.
B) n'a aucun sens. Mais, quel que soit le sens qu'on lui donne, elle ne peut qu'être fausse puisqu'on n'a pas $u_n \sim \frac{1}{n^2}$
C) n'a aucun sens. Mais, quel que soit le sens qu'on lui donne, elle ne peut qu'être fausse puisque $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ n'est pas une série à termes positifs.

Enfin D) est fausse car même sans connaître la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ il est clair que c'est un nombre positif et donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est négatif.

Q20 B) ?

Ici on a $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ où $(u_n)_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)$ et $(v_n)_n = (u_{n+1} - u_n)_n$. On sait que la suite $(u_n)_n$ converge (vers la constante d'Euler) donc $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge également par télescopage.

Problème : **aucune des quatre propositions n'a le moindre sens**.

On peut néanmoins sans se mouiller affirmer que A) et D) doivent être fausses quel que soit le sens qu'on leur donne puisque $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge (même si l'implication sous-jacente de D) est vraie).

Pour B) et C), il va nous falloir de l'imagination.

Imaginons donc que le concepteur du sujet avait pour idée de montrer la convergence comme suit. On a, pour $n \geq 1$, $v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $|v_n| \sim \frac{1}{2n^2}$, or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge et donc $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge absolument. C'est une bonne méthode hein, je ne critique pas, mais convenons que ce n'est pas la seule. Imaginons maintenant que pour B), il faille lire « en utilisant la méthode du concepteur du sujet, on déduit la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ de la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ », et pour C) il faille lire « en utilisant la méthode du concepteur du sujet, on déduit la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ de la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ » (oui, j'ai prévenu qu'il y aurait besoin d'imagination). Il apparaît alors que B) doit être vraie et C) fausse... sauf si le concepteur du sujet a en fait utilisé une autre méthode que celle que je lui attribue.

Q21 D).

$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ est le produit de quatre entiers consécutifs et n'est divisible ni par 16, ni par 18 ni par 20. Donc A), B) et C) sont fausses.

Parmi quatre entiers consécutifs il y a nécessairement deux entiers pairs dont exactement un est un multiple de 4. Donc un tel produit est divisible par 8. De plus, parmi quatre entiers consécutifs (en fait c'est déjà vrai pour trois entiers consécutifs) il y a nécessairement un multiple de 3. Donc un tel produit est divisible par 3. Enfin 3 et 8 sont premiers entre eux donc d'après un corollaire du lemme de Gauss, un tel produit est divisible par $8 \times 3 = 24$. Donc D) est vraie.

Q22 B).

La question est mal formulée (les quantifications sont mal placées).
On a b qui divise $a^2 + 1$ donc b divise $(a^2 + 1)(a^2 - 1) = a^4 - 1$.
Ainsi, si b divise $a^4 + 1$ alors b divise $(a^4 + 1) - (a^4 - 1) = 2$.
De même, si b divise 2 alors b divise $(a^4 - 1) + 2 = a^4 + 1$.
Donc B) est vraie, et assez clairement les 3 autres sont fausses.

Q23 C).

On cherche la valuation 10-adique de $23! = 23 \times 22 \times 21 \times \cdots \times 1$.

Dans ce produit un facteur sur deux est pair alors qu'un facteur sur cinq seulement est un multiple de 5 donc $v_{10}(23!) = v_5(23!) = v_5(\prod\limits_{k=1}^{23} k) = \sum\limits_{k=1}^{23} v_5(k) = v_5(5) + v_5(10) + v_5(15) + v_5(20) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Q24 A)C).

L'énoncé confond chiffre et nombre.
Pour $n \geq 5$ on a $v_2(n!) > v_{10}(n!)$ (même argument que pour 23). Ainsi, en notant $p = v_{10}(n!)$, on a $v_2\left(\frac{23!}{10^p}\right) > 0$ et donc $\frac{23!}{10^p}$ est pair. Le dernier chiffre de $\frac{23!}{10^p}$ est donc 2, 4, 6 ou 8 (et donc c'est « un nombre pair » selon les mots de l'énoncé). En particulier c'est vrai si n est pair.

Q25 C).

Tous les nombres proposés sont bien premiers.

On a $21 = 3 \times 7$ donc d'après l'identité géométrique : $2^{21} - 1 = \left(2^3\right)^7 - 1 = (2^3 - 1)\Big(\sum_{k=0}^{6} 2^{3k}\Big)$.

Et donc $2^3 - 1 = 7$ divise $2^{21} - 1$. Donc C) est vraie.

Évidemment $2^{21} - 1$ est impair donc A) est fausse.

On a $2^{21} = 2 \times 4^{10} \equiv 2 \times 1^{10} \equiv 2$ [3] donc 3 ne divise pas $2^{21} - 1$ et B) est fausse.
On a $2^{10} \equiv 1$ [11] : en MPSI c'est une simple application du petit théorème de Fermat, en PCSI il faut l'obtenir en calculant les puissances successives de 2 modulo 11 jusqu'à tomber sur -1. Par conséquent, on a $2^{21} = 2 \times \left(2^{10}\right)^2 \equiv 2 \times 1^2 \equiv 2$ [11], donc 11 ne divise pas $2^{21} - 1$ et D) est fausse.

Q26 B).

Tous les nombres proposés sont bien premiers.
On a $21 = 7 \times 3$ donc d'après l'identité géométrique : $2^{21} - 1 = \left(2^7\right)^3 - 1 = (2^7 - 1)\left(1 + 2^7 + 2^{14}\right)$. Et donc $2^7 - 1 = 127$ divise $2^{21} - 1$. Donc B) est vraie.
Je ne connais par cœur mes puissances de 2 que jusqu'à 2^{10}. On a d'après la question précédente : $7 \mid 2^{21} - 1 = 127 \times (1 + 128 + 1024 \times 16)$ et 127 étant premier, 7 ne divise pas 127. Donc d'après le lemme d'Euclide on a $7 \mid \left(129 + 16000 + 24 \times 16\right) = 16513$. En posant la division euclidienne j'obtiens $16513 = 7 \times 2359$. En posant les divisions euclidiennes j'obtiens $2359 \equiv 99$ [113], puis $2359 \equiv 1$ [131], puis $2359 \equiv 30$ [137]. Donc A), C) et D) sont fausses.
Il y a peut-être plus rapide, mais cette méthode reste raisonnable.

Q27 B)C).

Tous les nombres proposés sont bien premiers.
Bon, comme d'habitude, identité géométrique : $3^{12} - 1 = \left(3^4\right)^3 - 1 = (3^4 - 1)\left(1 + 3^4 + 3^8\right)$.
Et donc $3^4 - 1 = 9^2 - 1 = 81 - 1 = 80 = 16 \times 5$ divise $3^{12} - 1$. Ainsi 2 et 5 sont des diviseurs premiers de $3^{12} - 1$ et B) est vraie.
Évidemment $3^{12} - 1 \equiv -1$ [3] donc 3 ne divise pas $3^{12} - 1$ et A) est fausse.
Comme d'habitude, Fermat (ou calcul successif des puissances en PCSI) : $3^{10} \equiv 1$ [11] donc $3^{12} - 1 \equiv 9 - 1 \equiv 8$ [11] et 11 ne divise pas $3^{12} - 1$ donc D) est fausse.
Et un dernier coup de Fermat (ou...) : $3^6 \equiv 1$ [7] donc $3^{12} - 1 \equiv 1^2 - 1 \equiv 0$ [7] et 7 divise $3^{12} - 1$ donc C) est vraie.

Q28 A).

Les réponses étant incompatibles entre elles, au plus l'une d'elles est vraie.
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}*$.
On a, par définition de la partie entière : $[x] \leq x < [x] + 1$ donc $n[x] \leq nx < n[x] + n$. Ainsi $n[x]$ est un entier inférieur à nx. Or $[nx]$ est le plus grand entier inférieur à nx. Par conséquent : $n[x] \leq [nx]$. D'où $[x] \leq \frac{[nx]}{n}$, et par croissance de l'application partie entière : $[x] = [[x]] \leq \left[\frac{[nx]}{n}\right]$.
Par ailleurs comme on a $[nx] \leq nx$ on déduit $\frac{[nx]}{n} \leq x$ puis, toujours par croissance de l'application partie entière : $\left[\frac{[nx]}{n}\right] \leq [x]$.
D'où $\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$, et donc A) est vraie et les autres sont fausses.

Q29 B).

On a (après division euclidienne) $2000 \equiv 5$ [7] donc $2000^{1000} \equiv 5^{1000}$ [7]. Comme d'habitude, Fermat (ou calcul successif des puissances en PCSI) : $5^6 \equiv 1$ [7]. On effectue la division euclidienne de 1000 par 6 et on trouve $1000 \equiv 4$ [6] donc $5^{1000} \equiv 5^4 \equiv 2$ [7].

Q30 B).

Bon c'est un calcul, ça donne 2, voilà quoi.

Q31 D).

Comme d'habitude quand on me demande la matrice de la projection orthogonale sur un plan dans $\mathbb{R}^3$, je commence par chercher la matrice de la projection orthogonale sur la droite orthogonale au plan car celle-ci est quasiment gratuite à l'aide de la formule de projection. Ici le plan P a pour équation $2x-2y+z=0$ donc sa droite orthogonale $P^\perp = D$ est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix}$ a pour norme $\sqrt{2^2+2^2+1}=3$. Ainsi pour tout $\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a $p_D^P\left(\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = < \begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix} > \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9} < \begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{2x-2y+z}{9}\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et donc p_D^P a pour matrice $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, puis p_P^D a pour matrice $I_3 - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 8\end{pmatrix}$.

Q32 C).

Calcul direct. La méthode de la question 1 permet une résolution rapide.

Q33 B).

Notons $C = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$. On a $\det(C)=0$ donc (u,v,w) est liée. Plus finement on a $Ker(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ donc $Ker(f) = \text{Vect}(-2i+j-k)$, ce qui **ressemble** mais **n'est pas** le résultat proposé en D).

Q34 A)B).

Notons f la restriction de la fonction proposée sur $\mathbb{R}^*$. Après DL en 0 de l'exponentielle on a $f(x) = \frac{1}{2}x + o(x)$, donc f a un prolongement dérivable sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0)=0$ et on a alors $f'(0)=1/2$.

Q35 B).

Encore un calcul de DL mais cette fois en $+\infty$: $f(x) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = x + 0 + o(1)$. Donc f a bien un asymptote en $+\infty$ qui est la droite Δ d'équation $y = x+0$ (première bissectrice).

Q36 A).

Technique classique de résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes : les racines sont $\frac{\boldsymbol{i}-1}{2}a$ et $-\frac{1+\boldsymbol{i}}{2}$. On a bien sûr $\frac{\boldsymbol{i}-1}{2}a = \frac{(\boldsymbol{i}-1)(\boldsymbol{i}+1)}{2(\boldsymbol{i}+1)}a = \frac{-2}{2(\boldsymbol{i}+1)}a = -\frac{a}{1+\boldsymbol{i}}$.

Bien sûr, on va encore plus vite avec la méthode de la question 1... ☹