1988

CONCOURS INTERNE

et

CONCOURS D'ACCÈS À L'ÉCHELLE DE RÉMUNÉRATION DES PROFESSEURS CERTIFIÉS

SESSION DE 1988

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5 × 5.

Une des bases du savoir-faire en géométrie est la capacité de construire des figures à la règle et au compas (c'est-à-dire par intersection de droites et de cercles). Lorsque cette capacité — pour des raisons que l'algèbre éclaire — tombe en défaut, on s'intéresse à des solutions approchées mettant en jeu des intersections de lignes appropriées.

L'épreuve est organisée autour d'exemples pratiques de ces deux situations, choisis essentiellement parmi les polygones réguliers convexes (5, 7, 9 côtés).

Dans tout le problème, quand on demande de construire une figure, il est entendu qu'il s'agit d'une construction à la règle et au compas; quand on parle d'un polygone régulier, il est convexe et le mot convexe est sous-entendu.

Première partie

POINTS CONSTRUCTIBLES

Dans ses *Leçons sur les constructions géométriques* (1940-1941), Henri Lebesgue précise ce qu'on entend par points constructibles :

« Des points étant donnés, on se propose d'en construire d'autres qu'ils déterminent en n'usant que de la règle et du compas, la règle ne devant servir qu'à joindre (tracer une droite) deux points donnés ou précédemment obtenus, le compas ne devant servir qu'à tracer un cercle dont le centre est un point donné ou déjà obtenu et dont le rayon est la distance de deux points donnés ou déjà obtenus. »

On nomme droite constructible une droite joignant deux points constructibles et cercle constructible un cercle centré en un point constructible et dont le rayon est la distance de deux points constructibles. Il va de soi que les constructions fondamentales (médiatrice d'un segment, parallèle ou perpendiculaire à une droite issue d'un point, bissectrice d'un angle), sont considérées comme connues.

Soient O et I deux points donnés, distincts, du plan. Dans toute cette partie on désigne par points constructibles les points qu'on peut construire à partir de O et I.

1.1. En traçant les figures correspondantes, montrer que sont constructibles :

— les sommets des carrés,

— les sommets des hexagones réguliers,

admettant O et I comme sommets consécutifs ou non.

1.2. Soit J un point constructible autre que O et I.

a. Construire un point J_1 vérifiant $OJ \times OJ_1 = OI^2$.

b. Construire un point J' vérifiant $OJ'^2 = OI \times OJ$.

1.3. Le pentagone régulier.

On désigne par Γ le cercle de centre O et de rayon OI et par S le symétrique de I par rapport à O. Sur une figure, marquer les points O et I (distance OI : 4 cm), tracer le cercle Γ et mettre en place, en s'aidant d'une calculatrice ou d'un rapporteur, le pentagone régulier IABB'A' inscrit dans ce cercle. BB' et SI se coupent en H; soit O' le symétrique de O par rapport à H et I' le symétrique de I par rapport à H.

Comparer successivement : les directions de SB et OA, de O'B et SA, de I'B et AB, ainsi que les longueurs SO' et SB, SI' et SA. Des démonstrations, dont l'ordre est laissé au choix du candidat, justifieront les réponses.

Prenant la distance OI comme unité de longueur (OI = 1) et la distance O'S comme inconnue (O'S = d), utiliser une partie convenable de la figure, par exemple deux triangles homothétiques qu'on indiquera, pour former une équation du second degré vérifiée par d. Calculer d. Construire un segment de longueur d, puis réaliser la construction du pentagone IABB'A'.

1.4. Exploration des polygones réguliers constructibles.

On note $\mathfrak{P}_n$ le polygone régulier à n côtés de centre O dont un sommet est I; on dira que $\mathfrak{P}_n$ est constructible si tous ses sommets le sont.

a. Montrer que $\mathfrak{P}_{2n}$ est constructible si et seulement si $\mathfrak{P}_n$ est constructible. On peut donc désormais se limiter au cas où n est impair.

b. $\mathfrak{P}_3$ et $\mathfrak{P}_5$ sont constructibles; $\mathfrak{P}_{15}$ est-il constructible ? (On tracera sur une même figure $\mathfrak{P}_3$ et $\mathfrak{P}_5$.)

c. On suppose $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{P}_k$ constructibles, les entiers n et k étant premiers entre eux. Montrer que $\mathfrak{P}_{nk}$ est constructible : on prouvera qu'il existe un sommet de $\mathfrak{P}_n$ et un sommet de $\mathfrak{P}_k$ qui sont deux sommets consécutifs de $\mathfrak{P}_{nk}$.

Deuxième partie

NOMBRES CONSTRUCTIBLES

Comme dans la première partie les points O et I distincts sont donnés et on désigne par points constructibles les points qu'on peut construire à la règle et au compas à partir de O et I.

On rapporte le plan au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et on appelle point rationnel un point dont les deux coordonnées sont rationnelles.

2.1. Montrer que tous les points rationnels du plan sont constructibles.

2.2. Pour déterminer de nouveaux points on s'intéresse aux cercles et aux droites construits à l'aide des points rationnels.

Montrer que ces droites et ces cercles admettent dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des équations à coefficients rationnels. En examinant leurs intersections, successivement dans le cas de deux droites, d'une droite et d'un cercle, de deux cercles, montrer que chaque coordonnée d'un point d'intersection est ou bien un nombre rationnel ou bien un nombre irrationnel racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

2.3. *a.* Soit c un réel. Montrer l'équivalence des deux propositions :

c est l'abscisse d'un point constructible de l'axe $(O, \vec{i})$;

$|c|$ est la distance de deux points constructibles.

Les réels c possédant ces propriétés sont dits nombres constructibles.

b. Montrer que la somme et le produit de deux nombres constructibles sont des nombres constructibles. Montrer que l'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps du corps des réels.

c. On considère les droites et les cercles représentés dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par des équations dont les coefficients sont des nombres constructibles. Montrer que ce sont des droites et des cercles constructibles.

Tournez la page S. V. P.

2.4. À tout point du plan on associe son affixe complexe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle nombres complexes constructibles les affixes des points constructibles.

Montrer que le conjugué d'un nombre complexe constructible est constructible, que la somme et le produit de deux nombres complexes constructibles sont constructibles. Montrer que les nombres complexes constructibles constituent un sous-corps du corps des complexes. Montrer que les racines carrées d'un nombre complexe constructible sont constructibles.

2.5. On considère une conique à centre, ellipse ou hyperbole, définie dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par une équation $F(x, y) = 0$ où F est un polynôme du second degré à coefficients réels constructibles. Montrer que ses axes de symétrie sont des droites constructibles, que ses sommets et ses foyers sont des points constructibles.

Troisième partie

SOLUTIONS GRAPHIQUES

L'algèbre établit qu'il serait contradictoire que toute équation du troisième degré à coefficients constructibles ait ses racines constructibles. En particulier il sera ici admis qu'on ne peut pas, à la règle et au compas, « diviser en trois angles égaux » un angle quelconque donné (trisection), et que, parmi les polygones réguliers, ni $\mathfrak{P}_9$ ni $\mathfrak{P}_7$ ne sont constructibles. On propose dans cette partie des solutions graphiques à ces problèmes en s'aidant d'une courbe auxiliaire constructible point par point à la règle et au compas.

Comme dans les parties précédentes, les points O et I sont donnés; on désigne par D la droite OI, par Γ le cercle de centre O passant par I, et par S le symétrique de I par rapport à O. Le plan est orienté. Chaque fois qu'on utilisera un repère, il s'agira du repère orthonormal positif $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.

3.1. Trisection d'un angle particulier.

a. Soit U et U′ deux points de Γ symétriques par rapport à D, pris hors de D, T le symétrique de O par rapport à la droite UU′, V le symétrique de U′ par rapport à la droite OU.

Établir l'égalité : $3\,(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OV})$.

Montrer que la droite TU′ passe par le point K de Γ diamétralement opposé à V.

b. On suppose donné le point K sur Γ hors de D et, à chaque point T de D, on associe le point P de la droite KT, s'il existe, qui se projette orthogonalement sur D au milieu de OT.

Montrer que si P est sur Γ, différent de K, il permet de résoudre la trisection de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{KO})$.

c. Lorsque T décrit D, le point P défini en *b.* décrit un ensemble $\mathcal{H}$. Reconnaître analytiquement cet ensemble; situer ses asymptotes. (On désignera par x_0, y_0 les coordonnées de K.)

d. Tracés : on prend K défini sur Γ par $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Mettre en place l'ensemble $\mathcal{H}$ correspondant; on tracera avec soin les portions de $\mathcal{H}$ fournissant son intersection avec Γ.

À l'aide des points obtenus, placer les sommets de $\mathfrak{P}_9$.

Tournez la page S. V. P.

3.2. Trisection d'un angle quelconque.

La méthode qui précède exigerait de tracer une courbe $\mathcal{H}$ pour chaque donnée d'angle. On voudrait disposer d'une courbe utilisable pour tout angle.

a. Sur la perpendiculaire en I à D on fait varier deux points M et M' symétriques par rapport à I. Soit N le symétrique de M' par rapport à la droite OM et soit M_1 le symétrique de M' par rapport à O.

Reconnaître l'ensemble décrit par M_1. Montrer que la droite NM_1 est parallèle à OM et passe par un point fixe Ω.

Établir l'égalité : $3(D, \Omega N) = (D, ON)$ lorsque N est distinct de Ω.

b. Lorsque M décrit la perpendiculaire en I à D, N décrit une courbe $\mathcal{L}$ qu'on se propose de construire.

On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + t\vec{j}$, t étant un paramètre qui décrit R. Déterminer les coordonnées de N en fonction de t. Mettre en place quelques points de la courbe $\mathcal{L}$ et donner son allure.

Comment peut-on utiliser cette courbe $\mathcal{L}$ pour le problème de la trisection ?

3.3. Tracé de $\mathfrak{P}_7$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les sommets de $\mathfrak{P}_7$ ont pour affixes les racines septièmes de l'unité.

On pose $\alpha = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{7}\right)$ et $s = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$.

a. Calculer $s + \bar{s}$. On pourra s'aider d'un dessin de $\mathfrak{P}_7$ obtenu au moyen de la calculatrice ou du rapporteur ($\bar{s}$ est le conjugué de s).

Calculer $s\bar{s}$. Déterminer s.

b. Montrer que α, α^2, α^4 sont les racines de l'équation :

$$z^3 - sz^2 + \bar{s}z - 1 = 0$$

et que α^3, α^5, α^6 sont les racines de l'équation :

$$z^3 - \bar{s}z^2 + sz - 1 = 0.$$

Comment pourrait-on retrouver les valeurs de $s + \bar{s}$ et $s\bar{s}$?

c. Vérifier que le produit $(z - 1)(z - s)$ regardé comme fonction de z prend en α, α^2, α^4 des valeurs imaginaires pures.

Ceci amène à chercher l'ensemble $\mathcal{K}$ des points du plan d'affixe z tels que $(z - 1)(z - s)$ soit imaginaire pur et à étudier ses intersections avec Γ.

Former une équation cartésienne de $\mathcal{K}$, reconnaître cet ensemble et en proposer une construction point par point.

Sur une figure (distance OI = 4 cm), mettre en place $\mathcal{K}$ et placer les sommets de $\mathfrak{P}_7$.

• •
•