MATHS II du **C**oncours **C**entrale - **S**upélec 2010 filière TSI

(Les calculatrices étaient autorisées : Voir les « remarques **TI** » ci-dessous)

$E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique . La base canonique est notée $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $L(E)$.

Partie I -

I.A -

Remarque : l'expression « la droite vectorielle de vecteur directeur a » est bâtarde !
On devrait lui préférer « la droite vectorielle engendrée par a » .

RAPPEL : $\mathrm{Vect}(a) = \left\{ x \in E \;/\; \exists \lambda \in \mathbb{R} ,\ x = \lambda a \right\} = \left\{ \lambda a \;/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

I.A.1)

- Supposons que D est stable par f . En particulier $f(a)$ est dans D . Donc il existe un réel λ tel que $f(a) = \lambda a$. Donc a est vecteur propre de f (associé à λ) car a est non nul . ½ C.Q.F.D. .
- Réciproquement , supposons que a est un vecteur propre de f et notons λ la valeur propre associée. Pour x quelconque dans $\mathrm{Vect}(a)$ on peut poser $x = \mu a$ et on obtient
$f(x) = f(\mu a) \underset{f \text{ est linéaire}}{=} \mu f(a) = \mu\lambda a$. Donc $f(x)$ reste dans $\mathrm{Vect}(a)$. C.Q.F.D. .

I.A.2)

Soit f un endomorphisme de E . Le polynôme caractéristique de f s'écrit
$P_f = -X^3 + \mathrm{Tr}(f)X^2 + a_1 X + \mathrm{Dét}(f)$ donc $\widetilde{P_f}(\lambda) \underset{\lambda \to \pm\infty}{\sim} -\lambda^3$. En particulier

$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \widetilde{P_f}(\lambda) = +\infty$ donc $\widetilde{P_f}$ prend des valeurs strictement positives .

De même $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \widetilde{P_f}(\lambda) = -\infty$ donc $\widetilde{P_f}$ prend des valeurs strictement négatives . Or $\widetilde{P_f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc le **T**héorème des **V**aleurs **I**ntermédiaires montre que $\widetilde{P_f}$ atteint 0 : Il existe λ_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $\widetilde{P_f}(\lambda_0) = 0$. Donc λ_0 est valeur propre de f . Soit a un vecteur propre associé . D'après I.A.1) la droite $\mathrm{Vect}(a)$ est stable par f . C.Q.F.D. .

I.A.3)

Si n est impair alors le raisonnement du I.A.2) s'applique car alors $\widetilde{P_f}(\lambda) \underset{\lambda \to \pm\infty}{\sim} -\lambda^n$ ...

Par contre si n est pair alors $\widetilde{P_f}(\lambda) \underset{\lambda \to \pm\infty}{\sim} \lambda^n \underset{\lambda \to \pm\infty}{\to} +\infty$ et il se peut que P_f n'ait aucune racine réelle . Par exemple dans le cas où $n = 2$ on peut poser $f = R_{\pi/2}$ (rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$) .

La réponse est NON dans le cas général (mais OUI si n est impair) .

I.B - Ici f est un endomorphisme de E .

On suppose que P est un plan stable par f et on note $\tilde{f}$ la restriction de f au plan P .

I.B.1)

Soit $B_P = (v_1, v_2)$ une base de P . Le « **théorème de la base incomplète** » montre que l'on peut choisir v_3 tel que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .

Sachant que P est stable par f , on peut poser $f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2$ et $f(v_2) = \gamma v_1 + \delta v_2$ et nécessairement $\mathrm{Mat}_{B_P}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Donc le polynôme caractéristique de $\tilde{f}$ est

$(\alpha - X)(\delta - X) - \beta\gamma$.

De même on peut maintenant poser $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \mu \\ \beta & \delta & \theta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et la règle de développement d'un déterminant suivant la $3^{\text{ème}}$ ligne montre que le polynôme caractéristique de f s'écrit

$\begin{vmatrix} \alpha - X & \gamma \\ \beta & \delta - X \end{vmatrix}(\lambda_3 - X) = \big((\alpha - X)(\delta - X) - \beta\gamma\big)(\lambda_3 - X)$. D'où C.Q.F.D. .

I.B.2)

D'après ce qui précède en I.A.1) on doit ici faire l'hypothèse que $\tilde{f}$ admet une valeur propre que je note λ_1 . En choisissant v_1 en tant que vecteur propre de $\tilde{f}$ associé à λ_1 on trouve donc , selon la preuve de I.B.1) , $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \gamma & \mu \\ 0 & \lambda_2 & \theta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ et par conséquent les valeurs propres de $\tilde{f}$ sont λ_1 , λ_2 et celles de f sont $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$.

<u>1^{er} cas</u> : la liste $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3$ possède au moins deux éléments distincts $\lambda_{j_1} , \lambda_{j_2}$.

Dans ce cas chaque valeur propre λ_j apporte une droite $D_j = \mathrm{Vect}(w_j)$ stable par f et le système (w_{j_1} , w_{j_2}) est libre (premier théorème du chapitre « Réductions des endomorphismes et matrices carrées) . Donc $D_{j_1} \neq D_{j_2}$. C.Q.F.D. .

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Ou bien l'espace propre de f associé à l'unique valeur propre est de dimension au moins 2 . Dans ce cas on peut trouver un système (w_1 , w_2) libre formé par des vecteurs propres de f et les deux droites $\mathrm{Vect}(w_1)$, $\mathrm{Vect}(w_2)$ sont stables par f d'où C.Q.F.D. .

Ou bien le seul espace propre de f est de dimension 1 et il constitue la seule droite stable par f .

Sous l'hypothèse que f possède un plan invariant il n'existe qu'un seul cas où f ne possède qu'une seule droite stable : f n'a qu'une valeur propre , d'ordre 3 , et son seul espace propre est une droite .

I.C -

Ici g est un endomorphisme de F et F est un plan vectoriel réel . On suppose que g n'a aucune valeur propre (réelle) . On pose $M = \mathrm{Mat}_{(v_1 , v_2)}(g) = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$.

I.C.1)

Le polynôme caractéristique de g est aussi celui de M donc aussi celui de g' . Il s'écrit $Q = X^2 + a_1 X + a_0$ où les a_0 , a_1 sont réels .

Sachant que g n'a aucune valeur propre , les racines de Q sont complexes non réelles et conjuguées l'une de l'autre . On les appelle α et $\overline{\alpha}$. Soit $\varepsilon_1 = (a , b)$ un vecteur propre de g' associé à α .

On obtient $g'(\varepsilon_1) = \alpha\varepsilon_1$ ce qui se traduit par $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} ma + nb = \alpha a \\ pa + qb = \alpha b \end{cases}$.

En calculant le conjugué de chacun des membres on lit

$$\begin{cases} \overline{ma + nb} = \overline{\alpha a} \\ \overline{pa + qb} = \overline{\alpha b} \end{cases} \underset{m , n , p , q \text{ sont réels}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m\overline{a} + n\overline{b} = \overline{\alpha}\,\overline{a} \\ p\overline{a} + q\overline{b} = \overline{\alpha}\,\overline{b} \end{cases} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \overline{\alpha}\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} ,$$

c'est à dire $g'(\overline{\varepsilon_1}) = \overline{\alpha}\,\overline{\varepsilon_1}$. C.Q.F.D. .

I.C.2)

Le système $B_1 = (\varepsilon_1 , \overline{\varepsilon_1})$ est formé par des vecteurs propres de g' associés à des valeurs propres distinctes donc il est libre (sur $\mathbb{C}$) . Il constitue une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$. Or la matrice du nouveau système $\boxed{B_2 = (\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1} , \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})}$ dans B_1 s'écrit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est de déterminant -2 donc $\text{Dét}_{B_1}(B_2) \neq 0$ donc B_2 est libre aussi et est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$.

On obtient $P^{-1} = \dfrac{1}{\text{Dét}(P)}\,{}^t(\text{Com}(P)) = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$\text{Mat}_{B_2}(g') = P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \overline{\alpha} & -\overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Mat}_{B_2}(g') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha + \overline{\alpha} & \alpha - \overline{\alpha} \\ \alpha - \overline{\alpha} & \alpha + \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d\boldsymbol{i} \\ d\boldsymbol{i} & c \end{pmatrix} \text{ en posant } \begin{cases} c = \text{Re}(\alpha) \\ d = \text{Im}(\alpha) \end{cases}}$$

I.C.3)

ANALYSE :

Si X et Y conviennent alors le polynôme caractéristique de M doit être tel que $\forall \lambda \in \mathbb{C} , \widetilde{P_M}(\lambda) = (\lambda - X)^2 + Y^2 = (\lambda - X - \boldsymbol{i}Y)(\lambda - X + \boldsymbol{i}Y)$ donc les valeurs propres de M sont $X - \boldsymbol{i}Y$ et $X + \boldsymbol{i}Y$. Or ces valeurs propres sont α et $\overline{\alpha}$. Donc on doit avoir $2X = \alpha + \overline{\alpha}$ et $2\boldsymbol{i}Y = \pm(\alpha - \overline{\alpha}) = \pm\boldsymbol{i}\,2\,\text{Im}(\alpha)$. Autrement écrit on doit avoir $\boxed{\begin{cases} X = \text{Re}(\alpha) \\ Y = \pm\text{Im}(\alpha) \end{cases}}$.

Remarque : la partie « ... et $(X , Y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, tels que ... » dans l'énoncé est pour le moins piégeante puisque manifestement un couple (X , Y) qui convient doit être dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$!

SYNTHESE :

En faisant le pari que $\begin{cases} X = \text{Re}(\alpha) \\ Y = \text{Im}(\alpha) \end{cases}$ convient on doit inventer une nouvelle base $B_3 = (w_1 , w_2)$ de $\mathbb{C}^2$ telle que $g'(w_1) = c\,w_1 + d\,w_2$ et $g'(w_2) = -d\,w_1 + c\,w_2$.

Au brouillon j'avoue avoir fait une recherche systématique en partant de ces spécifications mais je n'ai pas le courage de la reproduire ici . Après coup on peut penser que j'aurais pu deviner une solution (suggérée par le résultat de la question précédente) à savoir

$$\boxed{\text{Si on pose } B_3 = (\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1} , \boldsymbol{i}\varepsilon_1 - \boldsymbol{i}\overline{\varepsilon_1}) \text{ alors } \text{Mat}_{B_3}(g') = \begin{pmatrix} \text{Re}(\alpha) & -\text{Im}(\alpha) \\ \text{Im}(\alpha) & \text{Re}(\alpha) \end{pmatrix}.}$$

Si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ vers B_3 alors on doit avoir $\begin{pmatrix} \text{Re}(\alpha) & -\text{Im}(\alpha) \\ \text{Im}(\alpha) & \text{Re}(\alpha) \end{pmatrix} = Q^{-1}MQ$. D'où C.Q.F.D. .

Remarque : en vérité les deux vecteurs $\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1} , \boldsymbol{i}\varepsilon_1 - \boldsymbol{i}\overline{\varepsilon_1}$ sont réels donc Q est à coefficients réels et il n'est nul besoin d'***admettre*** quoi que ce soit ici .

Voir **Annexe** en fin de texte pour le « On ***admettra*** que ... »

I.D -

I.D.1)

Soit $D = \text{Vect}(a)$ la seule droite stable par f et soit F le seul plan stable par f .

On sait que a est vecteur propre de f . Notons λ la valeur propre correspondante . Sachant que D n'est pas incluse dans F on a nécessairement $D \cap F = \{0_E\}$ donc $D \oplus F = E$. En notant (v_1 , v_2) une base de F on voit que (a , v_1 , v_2) est une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & y & t \end{pmatrix}$. En notant g la restriction de f à F on sait que g n'admet pas de droite invariante donc aucune valeur propre réelle . On peut donc lui appliquer le résultat du I.C.3) . Si on note $Q = \mathrm{Mat}_{(v_1, v_2)}(w_1 , w_2)$ alors on obtient $\mathrm{Mat}_{(a, w_1, w_2)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y \\ 0 & Y & X \end{pmatrix}$. C.Q.F.D. .

I.D.2)

Pour (x , y , z) quelconque dans E on a les équivalences suivantes :

$$(x , y , z) \in P \Leftrightarrow ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0) \Leftrightarrow (a , b , c) \perp (x , y , z) .$$

On suppose ici que P est stable par f . Pour (x , y , z) quelconque dans P on a donc $(x' , y' , z') \in P$ en posant $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donc $\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$ d'où

$\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\left({}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = {}^t(0)$ c'est à dire $\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} {}^tM \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (0)$ ce qui signifie (avec les notation de l'énoncé) $\forall (x , y , z) \in P , (x , y , z) \perp (a', b' , c')$ ou encore $(a', b' , c') \in P^{\perp}$.

Or l'orthogonal d'un plan est une droite et ici $P^{\perp} = \mathrm{Vect}\big((a , b , c)\big)$.

Donc nous venons d'établir que si P est stable par f alors ${}^tM\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$: ½ C.Q.F.D. .

Réciproquement supposons que ${}^tM\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec λ_0 dans $\mathbb{R}$.

Alors $\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$ implique $\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\left(\lambda_0 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$

d'où $\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\left({}^tM \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$ c'est à dire

$\forall (x , y , z) \in P ,\ {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$ qui exprime $\forall (x , y , z) \in P ,\ f\big((x , y , z)\big) \in P$.

C.Q.F.D. .

I.D.3)

Remarques **P**réliminaires :

1) Sachant que M est dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice ${}^tM$ l'est aussi et d'après I.A.2) elle admet au moins un vecteur propre donc en tenant compte de I.D.2) on sait que f possède au moins un plan stable .
2) D'ailleurs pour tout λ dans $\mathbb{C}$ on a $\text{Dét}(M-\lambda I_3)=\text{Dét}({}^t(M-\lambda I_3))=\text{Dét}({}^tM-\lambda\,{}^tI_3)=\text{Dét}({}^tM-\lambda I_3)$ ce qui prouve que M et ${}^tM$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres .

<u>Preuve</u> <u>de</u> i) $\Rightarrow$ ii) :

Supposons que f n'admet qu'une seule droite stable à savoir $D_1=\text{Vect}(V_1)$. Donc f n'admet qu'une valeur propre (réelle) que je note λ_1 et D_1 est l'espace propre correspondant .
D'après **R.P.** 1) il existe un plan P_1 stable par f . Supposons qu'il en existe un deuxième P_2 alors la droite vectorielle $D=P_1\cap P_2$ vérifie $f(D)\subset f(P_1)\subset P_1$ et $f(D)\subset f(P_2)\subset P_2$ donc $f(D)\subset P_1\cap P_2=D$. Donc $D=D_1$. On peut alors choisir V_2 et V_3 tels que (V_1,V_2) est une base de P_1 et (V_1,V_3) est une base de P_2 . Dans ces conditions (V_1,V_2,V_3) est une base de E et dans cette base la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix}\lambda_1&\mu_1&\mu_3\\0&\mu_2&0\\0&0&\mu_4\end{pmatrix}$ donc les valeurs propres de f sont λ_1,μ_2,μ_4 et ceci n'est possible que si $\mu_2=\mu_4=\lambda_1$ car f n'a qu'une valeur propre) . On voit alors que l'espace propre de f admet dans (V_1,V_2,V_3) l'équation

$\begin{pmatrix}\lambda_1&\mu_1&\mu_3\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&\mu_1&\mu_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\mu_1x_2+\mu_3x_3=0$. Il s'agit d'un espace de dimension au moins 2 ce qui est interdit car on devrait retrouver uniquement D_1 .
D'où C.Q.F.D. par l'absurde .

<u>Preuve</u> <u>de</u> ii) $\Rightarrow$ iii) :

Je suppose ii) . D'après **R.P.** 2) l'endomorphisme f n'a qu'une valeur propre que je note λ_1 .
Supposons que λ_1 soit d'ordre 2 . alors M possède une deuxième valeur propre λ_3 simple mais sachant que la somme des valeurs propres est réelle (c'est $\text{Tr}(M)$) , λ_3 serait réelle ce qui est faux .
Supposons que l'espace propre associé soit de dimension au moins 2 et soit donc (V_1,V_2) un système libre de cet espace . On peut choisir une base (V_1,V_2,V_3) de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\mu_1\\0&\lambda_1&\mu_2\\0&0&\lambda_1\end{pmatrix}=N$ et en étudiant le seul espace propre de ${}^tN$ on voit que non seulement le plan $\text{Vect}(V_1,V_2)$ est stable par f mais aussi le plan $\text{Vect}(\mu_1V_1+\mu_2V_2,V_3)$ dans le cas où $\mu_1\neq0$ ou $\mu_2\neq0$ (et n'importe quel plan dans le cas où $\mu_1=\mu_2=0$) .
C'est interdit . C.Q.F.D. par l'absurde .

<u>Preuve</u> <u>de</u> iii) $\Rightarrow$ i) :

Je suppose iii) .
Supposons que f possède au moins deux droites stables . D'après I.A.1) ces deux droites sont dans l'unique espace propre de f donc elles définissent un plan inclus dans cet espace propre . Or cet espace est de dimension 1 ce qui est contradictoire . C.Q.F.D. encore une fois par l'absurde .

Partie II -

II.A - L'énoncé a demandé de poser ici $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{pmatrix}$.

II.A.1)

Remarque **TI** n° 1 : (pour atteindre λ taper $\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{L}}$)

[0,1,0;0,0,1;a,b,c] STO> m ENTER

Expand(det(m − λ),λ) ENTER

donne $-\lambda^3+\lambda^2 c+\lambda b+a$.

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } M \text{ (dans } \mathbb{R}[X] \text{) s'écrit } -X^3+cX^2+bX+a\ .}$$

II.A.2)

Supposons que α est une valeur propre réelle de M . L'espace propre correspondant s'écrit

$$E_\alpha(M)=\left\{X\in M_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ MX=\alpha X\right\}=\left\{X\in M_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ (M-\alpha I_3)X=0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\right\}$$

Posons $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$X\in E_\alpha(M)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-\alpha&1&0\\0&-\alpha&1\\a&b&c-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\alpha x_1\\x_3=\alpha x_2\\ax_1+b\alpha x_1+(c-\alpha)x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_2=\alpha x_1\\x_3=\alpha^2x_1\\x_1(a+b\alpha+(c-\alpha)\alpha^2)=0\end{cases}\underset{\substack{\alpha\text{ est valeur}\\\text{propre de }M}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_2=\alpha x_1\\x_3=\alpha^2x_1\\x_1\times0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\alpha x_1\\\alpha^2x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_\alpha(M)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\end{pmatrix}\right)\text{ est de dimension } 1\ .}$$

II.A.3) (Question ambiguë)

Si on raisonne sur $\mathbb{C}$ alors on sait que chacun des sous espaces propres de M est de dimension 1 , par conséquent on a les équivalences suivantes :

M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda\in\mathrm{Spec}(M)$, $\mathrm{Dim}(E_\lambda(M))=\text{o.d.m. de }\lambda$ $\Leftrightarrow$ chacune des racines de P_M est d'ordre 1 .

Si on raisonne sur $\mathbb{R}$ il faut en plus que toutes les racines du polynôme caractéristique soient réelles .

M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ le polynôme caractéristique de M a 3 racines réelles distinctes .
M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ le polynôme caractéristique de M n'a que des racines simples .

II.A.4) D'après I.D.3) et vu que chaque sous-espace propre de f est de dimension 1 on a l'équivalence

$$\boxed{f\text{ n'a qu'une droite stable }\Leftrightarrow\text{ le polynôme } -X^3+cX^2+bX+a \text{ n'a qu'une racine réelle .}}$$

II.B - Etude d'un exemple : Ici $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans $\mathscr{B}_c$.

II.B.1)

Le polynôme caractéristique de f s'écrit $-X^3 + t^3$ et donc il n'a qu'une racine réelle , à savoir t .
Donc effectivement f ne possède qu'une droite stable (à savoir le sous-espace propre associé à t) et qu'un seul plan stable . D'après II.A.2) on a $\boxed{D_t = \mathrm{Vect}(e_1 + t e_2 + t^2 e_3)}$.

Pour ce qui est de P_t on obtient son équation en recherchant les vecteurs propres de ${}^tM$ (voir I.D.2)) : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$X \in E_t({}^tM) \Leftrightarrow {}^tM X = tX \Leftrightarrow ({}^tM - tI_3)X = 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -t & 0 & t^3 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -ta + t^3 c = 0 \\ a = tb \\ b = tc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t \times t^2 c + t^3 c = 0 \\ a = t^2 c \\ b = tc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t^2 c \\ b = tc \end{cases} \Leftrightarrow X = c \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{P_t \text{ est le plan d'équation } t^2 x + t y + z = 0 \text{ dans } \mathscr{B}_c .}$

II.B.2)

L'énoncé a posé $\Delta = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} D_t$.

Remarque : l'énoncé confond $\mathbb{R}^3$ avec l'espace affine usuel E de dimension 3 en considérant (du moins je le suppose) que le point courant M de E s'identifie avec le triplet (x , y , z) de ses coordonnées dans un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ qui est lui même identifié à $(0_{\mathbb{R}^3} , e_1 , e_2 , e_3)$.

Soit M un point de Δ . Il existe un t dans $\mathbb{R}$ tel que M soit dans $\mathbb{R}$ donc il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda(\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k})$. Donc les coordonnées de M s'écrivent $(x , y , z) = (\lambda , \lambda t , \lambda t^2)$. On constate que $y^2 - xz = \lambda^2 t^2 - \lambda \times \lambda t^2 = 0$.
Donc M est dans Σ . Ceci démontre $\Delta \subset \Sigma$. C.Q.F.D. .
Pour déterminer $\Sigma \setminus \Delta$ je cherche à simplifier l'équation cartésienne de Δ qui s'écrit (a priori)

$$\exists (t , \lambda) \in \mathbb{R}^2 , \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda t \\ z = \lambda t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} , \begin{cases} y = xt \\ z = xt^2 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} , \begin{cases} y = xt \\ z = yt \end{cases} \underset{\text{si } x \neq 0 \text{ alors } t = y/x}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ et } z = 0 \\ \text{ou} \\ z = y(y/x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ \text{ou} \\ xz = y^2 \text{ et } x \neq 0 \end{cases}$$. De plus $xz = y^2$ et $x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Ceci signifie que $\boxed{\Sigma \setminus \Delta = \text{droite } (Oz) \text{ privée de } O .}$.
Par conséquent Δ est une réunion de droites (les D_t et la droite (Oz)) qui passent toutes par O .

Σ est à la fois un cône de sommet O et une quadrique donc il s'agit d'un cône à base elliptique (mais aussi à base hyperbolique) .

Remarque : l'énoncé est ambigu qui demande la « nature de Σ » .
Si la question est l'équation réduite de Δ alors ...
L'équation de Σ se met sous la forme $\varphi(x\,,\,y\,,\,z)=0$ en posant $\varphi(x\,,\,y\,,\,z)=2y^2-2xz$.

$$\left(2(y^2-xz)\right)=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\text{et}$$

$$\forall\,\lambda\in\,,\ \text{Dét}(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(2-\lambda)-(2-\lambda)=(\lambda^2-1)(2-\lambda)\ .$$

Donc les valeurs propres de A sont $-1\,,1\,,2$. Il existe donc une base orthonormée de E (ou si on préfère un nouveau repère orthonormé de E) dans lequel l'équation de Δ s'écrit
$X^2+2Y^2-Z^2=0$. Ceci montre à nouveau que Σ est un cône de sommet O et à base elliptique (intercepter Σ par le plan d'équation $Z=1$) ou à base hyperbolique (intercepter Σ par le plan d'équation $X=1$) .
II.B.3)
(question imprécise : que signifie « une représentation de (Σ) » ?)
La courbe Γ intersection de Σ avec le plan d'équation $z=1$ admet pour équation $\begin{cases}x=y^2\\ z=1\end{cases}$. On reconnaît ici l'équation réduite d'une parabole de sommet le point A de coordonnées $(0\,,0\,,1)$ et dont l'axe de symétrie est $(A,\vec{i}\,)$.
Pour dessiner Σ on peut donc tracer Γ puis relier tout point de Γ à l'origine par une droite (qui est donc dans Σ) et ne pas oublier de rajouter (Ox) (intersection de Σ avec le plan d'équation $z=0$) .

II.C - On considère la surface (S_1) d'équation $y^2=4xz$
II.C.1)
(S_1) est encore un cône de sommet O et à base elliptique . (démarche identique à celle de II.B.2))
Pour atteindre son équation réduite on recherche les valeurs propres de la matrice $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et l'expérience montre qu'elles valent $-2\,,1\,,2$. L'équation réduite de (S_1) est $X^2+2Y^2=2Z^2$.
L'équation de (S_1) dans le repère initial est de la forme $\varphi(x\,,\,y\,,\,z)=0$ avec
$\varphi(x\,,\,y\,,\,z)=y^2-4xz$. Le cours donne l'équation du plan tangent à (S_1) en le point M_0 de coordonnées $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ sous la forme

$$(x-x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)+(y-x_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)=0\ .$$

Après calculs j'arrive à

Le plan tangent à (S_1) en M_0 a pour équation $2z_0x-y_0y+2x_0z=0$ dans $\mathscr{B}_c$.

On constate que le triplet $(0\,,0\,,0)$ vérifie cette équation . Ceci est normal puisque en tout point M_0 régulier d'un cône de sommet O le plan tangent à ce cône contient la génératrice passant par M_0 donc le sommet O (résultat de cours) .

II.C.2)

Si $x_0 \neq 0$ alors le plan tangent P_{M_0} à (S_1) en M_0 a pour équation $\dfrac{z_0}{x_0}x - \dfrac{y_0}{2x_0}y + z = 0$

donc on pose $t = -\dfrac{y_0}{2x_0}$ et on a les équivalences suivantes

$P_{M_0} = P_t \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{z_0}{x_0} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{y_0}{2x_0}\right)^2 = \dfrac{z_0}{x_0} \Leftrightarrow x_0\dfrac{{y_0}^2}{4{x_0}^2} = z_0 \Leftrightarrow {y_0}^2 = 4x_0z_0$ et cette dernière phrase est vraie puisque M_0 est dans (S_1) . C.Q.F.D. .

II.D - On considère la surface S_f d'équation $z = f(x\,,y)$ où f est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ supposée de classe C^2 sur U .

II.D.1)

$z = f(x\,,y) \Leftrightarrow g(x\,,y\,,z) = 0$ si on pose $g(x\,,y\,,z) = f(x\,,y) - z$.

Donc l'équation du plan tangent (que je note P_{M_0}) à S_f en M_0 s'écrit

$$(x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0\,,y_0\,,z_0) + (y - x_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0\,,y_0\,,z_0) + (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0\,,y_0\,,z_0) = 0$$

Le plan tangent P_{M_0} à S_f en M_0 a pour équation

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,y_0) - z + f(x_0\,,y_0) = 0\ .$$

II.D.2)

Tous les plans P_t contiennent l'origine . On a donc les équivalences suivantes

P_{M_0} est dans la famille des P_t

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (0 - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0) + (0 - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,y_0) - 0 + f(x_0\,,y_0) = 0 \\ \exists\, t \in \mathbb{R}\,,\ P_{M_0} : z = -ty - t^2x \end{cases} \quad (*)$$

Or , sous la première condition , l'équation de P_{M_0} s'écrit

$z = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,y_0)$ et il vient

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0\,,y_0) = x_0\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0) + y_0\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,y_0) \\ \exists\, t \in \mathbb{R}\,,\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,y_0) = t \text{ et } -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0) = t^2 \end{cases}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que tous les plans tangents à S_f soient des plans P_t

sont $\forall (x,y) \in U$, $\begin{cases} f(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 & (2) \end{cases}$

II.D.3)

On pose, pour x fixé, $u : y \mapsto f(x,y)$.

En supposant que f convient, la propriété (1) donne

$$\forall (x,y) \in U, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \text{ donc}$$

$$y u''(y) = -x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \underset{\text{Voir (2)}}{=} -x(-2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2xu'(y)u''(y)$$

d'où $u''(y)(y - 2xu'(y)) = 0$. C.Q.F.D. .

II.D.4) Ici $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$\forall (x,y) \in U, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{2x}$ donne

$\forall (x,y) \in U, f(x,y) = \dfrac{y^2}{4x} + \varphi(x)$ où φ est une fonction numérique de variable réelle de classe C^2 sur tout intervalle où elle est définie .

II.D.5)

Dans un premier temps on suppose que $u''(y) \neq 0$ partout où il est défini .

D'après les question précédentes on doit poser $\forall (x,y) \in U, f(x,y) = \dfrac{y^2}{4x} + \varphi(x)$ et en reportant ceci dans (2) on lit $\forall (x,y) \in U, -\dfrac{y^2}{4x^2} + \varphi'(x) = -\left(-\dfrac{2y}{4x}\right)^2 = -\dfrac{y^2}{4x^2}$ ce qui signifie que φ' est partout nulle donc $\forall (x,y) \in U, f(x,y) = \dfrac{y^2}{4x} + \mu$ où μ est une constante .

En reportant ce résultat dans (1) on obtient $\forall (x,y) \in U, \dfrac{y^2}{4x} + \mu = -x\dfrac{y^2}{4x^2} + \mu + y\dfrac{2y}{4x} = \dfrac{y^2}{4x}$

donc $\mu = 0$.

Si $\forall (x,y) \in U, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \neq 0$ alors la seule surface qui convient est (S_1) .

N.B. compte tenu de la longueur de l'épreuve j'ai supposé que l'étude des cas particuliers n'était pas demandée . Cependant une étude du cas ultraparticulier où $\forall (x,y) \in U, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ conduit à

Outre (S_1) il y a aussi tous les plans d'équation $z = \alpha y - \alpha^2 x$ (poser alors $t = -\alpha$) .

Partie III -

Avec r dans $\mathbb{R}^*$, g_r est l'endomorphisme de matrice $B(r) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ r^2 & 0 & -r \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}_c$.

III.A -

Le calcul (sur **TI 89** mais c'est vraiment facile sans) donne

$$\boxed{\widetilde{P_{g_r}}(\lambda) = -(\lambda - 2)(r^2 + \lambda^2) = -(\lambda - 2)(\lambda - \boldsymbol{i}\, r)(\lambda + \boldsymbol{i}\, r)} \ .$$

Par conséquent g_r n'a qu'une valeur propre c'est 2 et l'espace propre associé est de dimension 1 .
Un calcul (sur machine **TI 89** ou **Voyage 200** et avec un « petit » programme dont je garde le secret pour l'instant) donne

$$\boxed{E_2(g_r) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((r^2 + 4)e_1 + r^2 e_2 + r(r^2 + 2)e_3 \right)}$$

III.B -

Un vecteur quelconque de Δ_r est défini par

$\lambda\left((r^2 + 4)e_1 + r^2 e_2 + r(r^2 + 2)e_3 \right) = \left(\lambda(r^2 + 4) , \lambda r^2 , \lambda r(r^2 + 2) \right)$ où λ est réel .

III.B.1)

On pose ici $(x , y , z) = \left(\lambda(r^2 + 4) , \lambda r^2 , \lambda r(r^2 + 2) \right)$ et on a les équivalences suivantes :

$z = 1 \Leftrightarrow \lambda r(r^2 + 2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{r(r^2 + 2)}$ ce qui conduit à $x = \dfrac{r^2 + 4}{r(r^2 + 2)}$ et à

$y = \dfrac{r^2}{r(r^2 + 2)} = \dfrac{r}{r^2 + 2}$. C.Q.F.D. .

III.B.2)

Soit O' le « point » de l'espace E de coordonnées $(0 , 0 , 1)$ dans $(0_E , \mathscr{B}_c)$ et soit M un point quelconque du plan d'équation $z = 1$ dans ce repère . On note (x , y) ses coordonnées dans (O' , e_1 , e_2) et on a les équivalences suivantes :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{R} , \left(x = \frac{r^2 + 4}{r(r^2 + 2)} \text{ et } y = \frac{r}{r^2 + 2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(\frac{x}{y} = \frac{r^2 + 4}{r(r^2 + 2)} \frac{r^2 + 2}{r} \text{ et } y = \frac{r}{r^2 + 2} \right) \Leftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(\frac{x}{y} = 1 + \frac{4}{r^2} \text{ et } y = \frac{r}{r^2 + 2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(\left(\frac{x}{y} - 1 \right) = \frac{4}{r^2} \text{ et } y = \frac{r}{r^2 + 2} \right) \Leftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(r^2 = \frac{4y}{x - y} \text{ et } y = \frac{r}{r^2 + 2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(r^2 = \frac{4y}{x - y} \text{ et } r^2 + 2 = \frac{r}{y} \right) \Leftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(r^2 = \frac{4y}{x - y} \text{ et } \frac{4y + 2x - 2y}{x - y} = \frac{r}{y} \right) \Leftrightarrow$$

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^* , \left(r^2 = \frac{4y}{x - y} \text{ et } 2\frac{y(x + y)}{x - y} = r \right) \Leftrightarrow \left(2\frac{y(x + y)}{x - y} \neq 0 \text{ et } \left(2\frac{y(x + y)}{x - y} \right)^2 = \frac{4y}{x - y} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{y(x + y)}{x - y} \neq 0 \text{ et } \frac{y^2 (x + y)^2}{(x - y)^2} = \frac{y}{x - y} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{y(x + y)}{x - y} \neq 0 \text{ et } y(x + y)^2 = x - y \right) \Leftrightarrow$$

$\left(x - y \neq 0 \text{ et } y(x+y)^2 = x - y \right)$. En résumé

$\boxed{\Gamma \text{ est incluse dans } \Gamma' \text{ et } \Gamma' \setminus \Gamma \text{ est réduit à l'origine .}}$

III.B.3)

On a $\mathrm{Mat}_{(e_1, e_2)}(I , J) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et le cours de $1^{\text{ère}}$ année donne

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X - Y \\ X + Y \end{pmatrix}$. L'équation de Γ' dans la nouvelle base s'écrit donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y + X + Y) \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y - X - Y) \Leftrightarrow 2(X+Y)X^2 = -2Y$$

$\boxed{\text{L'équation de } \Gamma' \text{ dans } (I , J) \text{ est } Y + (X+Y)X^2 = 0 \text{ .}}$

Remarque **TI** n° 2 : il est très facile de tracer Γ' (en tout cas avec la calculatrice) car

$$Y + (X+Y)X^2 = 0 \Leftrightarrow Y(1+X^2) = -X^3 \Leftrightarrow Y = -\frac{X^3}{1+X^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + \frac{X^3}{1+X^2} \right) \text{et } y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X - \frac{X^3}{1+X^2} \right) \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X + 2X^3}{1+X^2} \right) \text{et } y = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{X}{1+X^2} \right)$$

et par conséquent Γ' est le support de l'arc paramétré $N : t \mapsto \left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\dfrac{1+2t^2}{1+t^2} , \dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{2}} \right)$.

1) sélectionner le $\boxed{\text{MODE}}$ graphique 2 : parametric

2) entrer dans la fenêtre $\boxed{Y =}$ les valeurs $\dfrac{t}{\sqrt{2}}\dfrac{1+2t^2}{1+t^2} , \dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{2}}$ comme $xt1(t)$ et $yt1(t)$,

3) ouvrir la fenêtre $\boxed{\text{WINDOW}}$ pour configurer le tracé (prendre des valeurs raisonnables de $t\min$, $t\max$ (-5 , 5 par exemple) et des $x\min$, $x\max$ (idem) et des $y\min$, $y\max$

4) lancer le tracé en veillant à avoir un « repère orthonormé » grâce à $\boxed{\text{F2}}$ ZoomSqr .

Partie IV -

Pour $V = (x , y , z)$ dans $\mathbb{R}^3$ on pose $A_V = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.

IV.A -

IV.A.1) Le calcul donne

$$A_V\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yu + zu^2 \\ xu + yu^2 + z \\ xu^2 + y + uz \end{pmatrix} \underset{\substack{u^3 = 1 \\ \text{donc } u^4 = u}}{=} \begin{pmatrix} x + yu + zu^2 \\ u(x + yu + u^2 z) \\ u^2(x + yu + u^2 z) \end{pmatrix} = (x + yu + u^2 z)\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{W_u = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } A_V \text{ associé à la valeur propre } x + yu + zu^2 \text{ .}}$

IV.A.2)

Les solutions de l'équation $u^3 = 1$ sont les racines $3^{\text{èmes}}$ de l'unité à savoir

1 , $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\overline{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{j}^2$. Donc $(W_1 , W_{\boldsymbol{j}} , W_{\overline{\boldsymbol{j}}})$ constitue un système de vecteurs propres de A_V . Pour que A_V soit diagonalisable dans ce système il suffit que ce système soit libre .

On pose donc

$$\boxed{P = \mathrm{Mat}_{(e_1 , e_2 , e_3)}(W_1 , W_{\boldsymbol{j}} , W_{\overline{\boldsymbol{j}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{j} & \overline{\boldsymbol{j}} \\ 1 & \boldsymbol{j}^2 & \overline{\boldsymbol{j}}^2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\overline{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{j}^2 \\ \boldsymbol{j}^4 = \boldsymbol{j}}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{j}^2 \\ 1 & \boldsymbol{j}^2 & \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}}$$

et on contrôle que cette matrice est inversible .

$$\mathrm{D\acute{e}t}(P) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{j} - 1 & \boldsymbol{j}^2 - 1 \\ 1 & \boldsymbol{j}^2 - 1 & \boldsymbol{j} - 1 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{j} - 1)(\boldsymbol{j} - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boldsymbol{j} + 1 \\ 1 & \boldsymbol{j} + 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$(\boldsymbol{j} - 1)^2 \left(1^2 - (\boldsymbol{j} + 1)^2\right) = (\boldsymbol{j} - 1)^2 (-\boldsymbol{j})(2 - \boldsymbol{j}) \neq 0$ C.Q.F.V.

A_V est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et dans la base $(W_1 , W_{\boldsymbol{j}} , W_{\overline{\boldsymbol{j}}})$.

De plus le cours affirme que $\boxed{(P^{-1}) A_V P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}$ où λ_1 est la valeur propre associée à W_1 et λ_2 est la v.p. associée à $w_{\boldsymbol{j}}$ et λ_3 est la v.p. associée à $W_{\overline{\boldsymbol{j}}} = W_{\boldsymbol{j}^2}$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_V \text{ sont } \begin{cases} \lambda_1 = x + y + z \\ \lambda_2 = x + \boldsymbol{j} y + \boldsymbol{j}^2 z \\ \lambda_3 = x + \boldsymbol{j}^2 y + \boldsymbol{j} z = \overline{\lambda_2} \end{cases} .}$$

IV.A.3)

Après avoir calculé J^2 on trouve immédiatement $\boxed{A_V = xI_3 + yJ + zJ^2}$

Les valeurs propres de J sont $(\mu_1 , \mu_2 , \mu_3) = (1 , \boldsymbol{j} , \boldsymbol{j}^2)$ donc

$P^{-1} J P = \mathrm{Diag}(\mu_1 , \mu_2 , \mu_3) \underset{\text{notation locale}}{=} D$ et il vient

$$P^{-1} A_V P = P^{-1}(xI_3 + yJ + zJ^2)P = (xP^{-1}I_3 + yP^{-1}J + zP^{-1}J^2)P =$$

$$xP^{-1}I_3P + yP^{-1}JP + zP^{-1}J^2P = xI_3 + yD + z(P^{-1}JP)^2 = xI_3 + yD + zD^2 .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } (\mu_1 , \mu_2 , \mu_3) = (1 , \boldsymbol{j} , \boldsymbol{j}^2) \text{ désignent les valeurs propres de } J \\ \text{alors les valeurs propres de } A_V \text{ sont les } x + y\mu_j + z\mu_j^2 . \end{array}}$$

IV.A.4)

Utilisons le résultat de I.D.3) :

L'endomorphisme f_V admet déjà $\lambda_1 = x + y + z$ comme valeur propre et le sous espace correspondant contient une droite vectorielle à savoir $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1 + e_2 + e_3)$.

De plus cet espace est réduit à une droite si λ_2 et λ_3 sont complexes puisqu'alors λ_1 est v.p. d'ordre 1 de f_V .
D'après I.D.3) on a les équivalences suivantes :
f_V convient $\Leftrightarrow$ λ_2 n'est pas réel ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ et $E_{\lambda_1}(f_V)$ est de dimension 1 .
Sachant que $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ on a les équivalences
$\lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow (\boldsymbol{j}^2 - \boldsymbol{j})y + (\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}^2)z = 0 \Leftrightarrow y = z$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \text{et} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x + y + z = x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{j}^2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 2y = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^2)y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} y = z \\ 0 = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}^2 - 2)y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 = z$. Ce cas ne convient évidemment pas car alors toute droite est stable par f_V . En conclusion $\boxed{f_V \text{ n'a qu'une seule droite stable } \Leftrightarrow y \neq z}$

IV.A.5)
D'après le cours le produit des valeurs propres de A_V est égal à son déterminant .

$$\text{Dét}(A_V) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1(x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{j}^2 z)(x + \boldsymbol{j}^2 y + \boldsymbol{j}z) \underset{\textbf{TI 89}}{=} \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\boxed{\text{Dét}(A_V) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$$

IV.B -

Considérons l'application $\begin{array}{rccc} g_0 : & \mathbb{R}^3 & \to & M_3(\mathbb{R}) \\ & V & \mapsto & A_V \end{array}$.

Soient $V_1 = (x, y, z)$ et $V_2 = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et soit λ dans $\mathbb{R}$.
On a $\lambda V_1 + V_2 = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ et il en résulte que

$$g_0(\lambda V_1 + V_2) = \begin{pmatrix} x + \lambda x' & y + \lambda y' & z + \lambda z' \\ z + \lambda z' & x + \lambda x' & y + \lambda y' \\ y + \lambda y' & z + \lambda z' & x + \lambda x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ z' & x' & y' \\ y' & z' & x' \end{pmatrix} =$$

$g_0(V_1) + \lambda g_0(V_2)$. Donc g_0 est linéaire .
De plus on constate immédiatement que $g_0(V) = 0_{M_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow V = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc le noyau de g_0 est réduit au vecteur nul donc g_0 est injective .
Ainsi g est un application linéaire injective (en tant que restriction de g_0) et elle est surjective par construction . C.Q.F.D. .

IV.C -

L'énoncé a définit la surface $\mathcal{S}$ par $\left\{V \in \mathbb{R}^3 \,/\, \det(A_V) = 1\right\}$.

Une équation de $\mathcal{S}$ est donc $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1$ dans la base $\mathscr{B}_c$
(ou dans le « repère canonique » $(0_{\mathbb{R}^3}, \mathscr{B}_c)$) .

IV.C.1)
$\mathcal{S} \cap \Pi_\lambda$ a pour équation

$$\text{(Eq)} \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1/\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 2/\lambda \end{cases} .$$

Or on constate que $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ donc on peut remplacer systématiquement $-2(xy+yz+zx)$ par $x^2+y^2+z^2-(x+y+z)^2$ et (Eq) devient

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2(x^2+y^2+z^2)+x^2+y^2+z^2-\lambda^2 = 2/\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x^2+y^2+z^2 = \dfrac{\lambda^3+2}{3\lambda} \end{cases}$$

→ Si $\lambda \in \left]-\sqrt[3]{2}\,,0\right[$ alors $\dfrac{\lambda^3+2}{3\lambda}<0$ donc la deuxième équation est impossible et $\mathcal{S}\cap\Pi_\lambda=\varnothing$

→ Si $\lambda=-\sqrt[3]{2}$ alors la deuxième équation ne donne qu'un « point » à savoir $(0,0,0)$ qui n'est pas dans Π_λ donc $\mathcal{S}\cap\Pi_\lambda=\varnothing$.

→ Si $\lambda\in\left]-\infty\,,-\sqrt[3]{2}\right[\cup\left]0\,,+\infty\right[$ alors la deuxième équation décrit la sphère de centre $O=(0,0,0)$ et de rayon $\boxed{R_\lambda=\sqrt{\dfrac{\lambda^3+2}{3\lambda}}}$ mais une telle sphère n'intercepte pas nécessairement le plan Π_λ . Pour cela il faut et il suffit que $R_\lambda \geqslant d(O,\Pi_\lambda)$ c'est à dire

$$\sqrt{\frac{\lambda^3+2}{3\lambda}} \geqslant \frac{|\lambda|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\lambda^3+2}{\lambda}\geqslant|\lambda|^2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^3+2}{\lambda}\geqslant\lambda^2 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda>0 \text{ et } \lambda^3+2\geqslant\lambda^3\\ \text{ou}\\ \lambda<-\sqrt[3]{2} \text{ et } \lambda^3+2\leqslant\lambda^3\end{cases} \Leftrightarrow \lambda>0 \ .$$

Si λ est négatif ou nul alors $\mathcal{S}\cap\Pi_\lambda=\varnothing$. Si λ est strictement positif alors $\mathcal{S}\cap\Pi_\lambda$ est un cercle de centre la projection orthogonale de O sur Π_λ (lequel a pour coordonnées $\left(\dfrac{\lambda}{3},\dfrac{\lambda}{3},\dfrac{\lambda}{3}\right)$) et de rayon $\sqrt{R_\lambda{}^2-d(O,\Pi_\lambda)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3\lambda}}$.

Ceci prouve que si V_0 est un « point » de $\mathcal{S}$ valant (x_0,y_0,z_0) alors le plan Π_λ obtenu avec $\lambda=x_0+y_0+z_0$ rencontre $\mathcal{S}$ suivant un cercle qui contient V_0 et tous les « points » déduits de V_0 par les rotations autour de la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$.

Donc $\mathcal{S}$ est une surface de révolution autour de la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$, d'équation $x=y=z$.

IV.C.2)

Le calcul (en machine ou à la main) montre que $\boxed{A_V\,A_{V'}=A_{V''}}$ et ceci se traduit aussi par $g(V)g(V')=g(V*V')$ (1) .

Soient V et V' dans $\mathcal{S}$. Par définition même , $V''=V*V'$ reste dans $\mathbb{R}^3$. De plus on a $\mathrm{Dét}(A_{V''})=\mathrm{Dét}(A_V\,A_{V'}) \underset{\text{cours de }2^{\text{ème}}\text{ année}}{=} \mathrm{Dét}(A_V)\mathrm{Dét}(A_{V'}) \underset{\text{déf. de }\mathcal{S}}{=} 1\times1=1$.

Ceci prouve que $V*V'$ reste dans $\mathcal{S}$. C.Q.F.D. .

a) Nous venons d'établir que $*$ <u>est</u> <u>une</u> <u>**L**oi</u> <u>de</u> <u>**C**omposition</u> <u>**I**nterne</u> <u>**P**artout</u> <u>**D**éfinie</u> <u>dans</u> $\mathcal{S}$.

b) Soient V_1 , V_2 , V_3 dans $\mathcal{S}$. On a $(A_{V_1}A_{V_2})A_{V_3}=A_{V_1}(A_{V_2}A_{V_3})$ du fait que le produit matriciel est associatif dans $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant (1) on lit
$g(V_1*V_2)g(V_3)=g(V_1)g(V_2*V_3)$ c'est à dire
$g\big((V_1*V_2)*V_3\big)=g\big(V_1*(V_2*V_3)\big)$. Du fait que g est injective il en résulte que
$(V_1*V_2)*V_3=V_1*(V_2*V_3)$. Autrement écrit : $*$ <u>est</u> <u>associative</u> <u>dans</u> $\mathcal{S}$.

c) On sait que $I_3 = g((1,0,0))$ est neutre pour $\times$ dans $M_3(\mathbb{R})$. Donc pour V quelconque dans $\mathcal{S}$ on a $g((1,0,0))g(V) = g(V)g((1,0,0)) = g((1,0,0))$ ce qui se traduit par $g((1,0,0)*V) = g(V*(1,0,0)) = g((1,0,0))$. Sachant que g est injective on en déduit $(1,0,0)*V = V*(1,0,0) = (1,0,0)$. En clair $(1,0,0)$ est neutre pour $*$ dans $\mathcal{S}$.

d) Soit V un élément quelconque de $\mathcal{S}$. On sait que $\text{Dét}(g(V)) = \text{Dét}(A_V) = 1 \neq 0$. Donc $g(V)$ est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$.

On a alors (une formule hors programme mais que nous avons quand même vérifiée en classe pour des matrice 3×3) $A_V^{-1} = \dfrac{1}{\text{Dét}(A_V)}\,{}^t\text{Com}(A_V) = {}^t\text{Com}(A_V)$ avec

$$\text{Com}(A_V) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} z & y \\ y & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & z \\ y & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} y & z \\ x & y \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & z \\ z & y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - xz \\ y^2 - xz & z^2 - xy & x^2 - yz \end{pmatrix} .$$

Ceci signifie $g(V)^{-1} = g\left(x^2 - yz , z^2 - xy , y^2 - xz\right)$. Si on pose

$V' = \left(x^2 - yz , z^2 - xy , y^2 - xz\right)$ on obtient donc $g(V)g(V') = I_3 = g(V')g(V)$ et par

conséquent $\text{Dét}(g(V')) = \dfrac{1}{\text{Dét}(g(V))} = \dfrac{1}{1} = 1$ ce qui prouve que V' est dans $\mathcal{S}$.

En utilisant l'injectivité de g on a $V * V' = (1,0,0) = V' * V$.

Donc tout élément V de $\mathcal{S}$ possède un symétrique (ici V') dans $\mathcal{S}$ pour la loi $*$.

La conjonction de a) , b) , c) et d) montrent que $(\mathcal{S} , *)$ est un groupe .

De plus les formules qui définissent V'' à partir de V et V' sont inchangées si on effectue l'échange de V avec V' c'est à dire si on effectue les échanges $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$ et $z \leftrightarrow z'$ (grâce à la commutativité de $\times$ dans $\mathbb{R}$ et à commutativité et associativité de $+$ dans $\mathbb{R}$) .

Donc $V * V' = V' * V$ et effectivement $*$ est commutative dans $\mathcal{S}$. C.Q.F.D. .

Remarque **TI** n° 3 :

le calcul de $g(V)^{-1}$ est évidemment très rapide avec une machine (en tout cas avec une **TI 89** ou une **Voyage 200**) mais il faut penser à simplifier l'expression trouvée à l'aide de la condition $\text{Dét}(A_V) = 1$:

```
[x,y,z;z,x,y;y,z,x] STO m(x,y,z)        ENTER
m(x,y,z) ^ -1 STO p                     ENTER
det(m(x,y,z)) STO d                     ENTER
p|d = 1                                 ENTER
```

IV.C.3)

Soit u un complexe de module 1 et soit t dans $\mathbb{R}$. L'énoncé a posé

$$F(t,u) = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{e}^{-2t} + \boldsymbol{e}^{t}(u + \bar{u}) , \boldsymbol{e}^{-2t} + \boldsymbol{e}^{t}(\boldsymbol{j}^2 u + \boldsymbol{j}\bar{u}) , \boldsymbol{e}^{-2t} + \boldsymbol{e}^{t}(\boldsymbol{j}u + \boldsymbol{j}^2\bar{u})\right) .$$

Sachant que $u = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}$ et $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}$ et donc $\boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\frac{4\pi}{3}} = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} = \bar{\boldsymbol{j}}$ on obtient

$$F(t,u) = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{e}^{-2t} + 2\boldsymbol{e}^{t}\cos(\theta) , \boldsymbol{e}^{-2t} + 2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) , \boldsymbol{e}^{-2t} + 2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

ce qui a déjà le mérite de prouver que $F(t,u)$ est bien dans $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs en utilisant la calculatrice de la manière qui suit on vérifie que $\text{Dét}(A_{F(t,u)})=1$.
Remarque **TI** n° 4 :
m((*e*^(−2t) +2*e*^(t)∗cos(θ))/3,(*e*^(−2t) +2*e*^(t)∗cos(θ−2π/3))/3,
(*e*^(−2t) +2*e*^(t)∗cos(θ+2π/3))/3) STO f (t,θ) ENTER
tExpand(det(f (t,θ))) ENTER
donne bien la valeur 1 .
Donc F est une application de $\mathbb{R}\times U$ dans S .
Soit maintenant (x,y,z) un élément quelconque de S . On a donc
$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=1$.
On recherche (t,θ) dans $\mathbb{R}\times]-\pi,\pi]$ tel que $(x,y,z)=F(t,u)$ phrase notée (Pb) .

$$(\text{Pb})\Leftrightarrow\begin{cases}3x=\boldsymbol{e}^{-2t}+2\boldsymbol{e}^{t}\cos(\theta)\\ 3y=\boldsymbol{e}^{-2t}+2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta-2\pi/3\right)\\ 3z=\boldsymbol{e}^{-2t}+2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta+2\pi/3\right)\end{cases}$$
. Or on observe que

$$\cos(\theta)+\cos(\theta-2\pi/3)+\cos(\theta+2\pi/3)=\text{Re}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}+\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\theta-2\pi/3)}+\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\theta+2\pi/3)}\right)=$$

$$\text{Re}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}(1+\overline{\boldsymbol{j}}+\boldsymbol{j})\right)=\text{Re}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}(1+2\cos(2\pi/3))\right)=\text{Re}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}\times 0\right)=0$$

Donc $(\text{Pb})\Rightarrow 3x+3y+3z=3\boldsymbol{e}^{-2t}\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}\ln(x+y+z)$. La question IV.C.1) a démontré que si (x,y,z) est dans S alors effectivement la quantité $x+y+z$ est dans $\mathbb{R}^{+*}$.
D’où les équivalences suivantes :

$$(\text{Pb})\Leftrightarrow\begin{cases}3x=\boldsymbol{e}^{-2t}+2\boldsymbol{e}^{t}\cos(\theta)\\ 3y=\boldsymbol{e}^{-2t}+2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta-2\pi/3\right)\\ 3z=\boldsymbol{e}^{-2t}+2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta+2\pi/3\right)\\ t=-\ln(x+y+z)/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-z=2\boldsymbol{e}^{t}\cos(\theta)\\ 2y-z-x=2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta-2\pi/3\right)\\ 2z-x-y=2\boldsymbol{e}^{t}\cos\left(\theta+2\pi/3\right)\\ t=-\ln(x+y+z)/2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z)=2\cos(\theta)\\ \sqrt{x+y+z}\,(2y-z-x)=2\cos\left(\theta-2\pi/3\right)\\ \sqrt{x+y+z}\,(2z-x-y)=2\cos\left(\theta+2\pi/3\right)\\ t=-\ln(x+y+z)/2\end{cases}\underset{L_3\leftarrow L_3+L_1+L_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z)=2\cos(\theta)\\ \sqrt{x+y+z}\,(2y-z-x)=2\cos\left(\theta-2\pi/3\right)\\ 0=0\\ t=-\ln(x+y+z)/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z)=2\cos(\theta)\\ \sqrt{x+y+z}\,(2y-z-x)=2\cos\left(\theta-2\pi/3\right)\\ t=-\ln(x+y+z)/2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z)=2\cos(\theta)\\ \sqrt{x+y+z}\,(2y-z-x)=-\cos(\theta)+\sqrt{3}\sin(\theta)\\ t=-\ln(x+y+z)/2\end{cases}\underset{L_2\leftarrow 2L_2+L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z) = 2\cos(\theta) \\ \sqrt{x+y+z}\,(3y-3z) = 2\sqrt{3}\sin(\theta) \\ t = -\ln(x+y+z)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z) = 2\cos(\theta) \\ \sqrt{3}\,\sqrt{x+y+z}\,(y-z) = 2\sin(\theta) \\ t = -\ln(x+y+z)/2 \end{cases} .$$

Il est clair que ce système ne possède que au plus une solution en $(t\,,u)$ car $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont imposés par les deux premières équations . Par contre l'existence de θ n'est assurée que si

$$\left(\sqrt{x+y+z}\,(2x-y-z)\right)^2 + \left(\sqrt{3}\,\sqrt{x+y+z}\,(y-z)\right)^2 = 4 \underset{\textbf{TI 89}}{\Leftrightarrow}$$

$$4(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) = 4 \;.$$

Cette condition est assurée puisque $(x\,,y\,,z)$ est dans S . En conclusion un élément de S admet effectivement un seul antécédent par F dans $\mathbb{R}\times U$. Donc F est bijective . C.Q.F.D. et ... OUF !

N.B. Peut-être ai-je eu tort de vouloir « trigonométriser » l'affaire ?

IV.C.4)

Remarque **TI** n° 5 :

La calculatrice donne (voir les entrées précédemment faites ci-dessus)

$f(t,\theta)*f(t',\theta')$ STO h ENTER

$\text{tCollect}(h)$ ENTER

Ici on obtient une expression dont le premier coefficient est celui de $f(t+t',\theta+\theta')$ alors on soupçonne une formule ...

$\text{tCollect}(h) - f(t+t',\theta+\theta')$ ENTER

donne la matrice nulle . Sachant que si on pose $u = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}$ et $u' = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta'}$ alors on a $uu' = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\theta+\theta')}$, on

peut conclure $\boxed{\forall\,(t\,,u)\in\mathbb{R}\times U\,,\,\forall\,(t'\,,u')\in\mathbb{R}\times U\,,\,F(t\,,u)*F(t'\,,u') = F(t+t'\,,uu')}$

Ceci a pour conséquence que la structure de groupe commutatif de $(S\;,\;*)$ aurait pu être déduite de celle de $\mathbb{R}\times U$ muni de la loi Δ définie par $(t\,,u)\Delta(t'\,,u') = (t+t'\,,uu')$.

En effet il est très facile de prouver que $(U\,,\times)$ est un groupe commutatif ce qui permet très vite de prouver que $\left(\mathbb{R}\times U\,,\Delta\right)$ a une structure de groupe commutatif . Ensuite toutes les propriétés de ce groupe sont transmises à $(S\;,\;*)$ via l'isomorphisme F de $\left(\mathbb{R}\times U\,,\Delta\right)$ sur $(S\;,\;*)$.

Annexe
Voici l'énoncé d'un exercice d'oral de concours (trouvé dans l'O.D.L.T. n° 16 de 2009) :
« Montrer que si deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables sur $\mathbb{C}$ alors elles le sont sur $\mathbb{R}$.»

En voici une preuve :
Lemme (dont la preuve est laissée au lecteur) :
Si pour M dans $M_{n,p}(\mathbb{C})$ on note $\overline{M}$ la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{C})$ obtenue par la conjugaison de chacun des coefficients de M alors on a les propriétés suivantes :
$\forall (A, B) \in M_{n,p}(\mathbb{C}) \times M_{n,p}(\mathbb{C})$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha}\,\overline{A} + \overline{\beta}\,\overline{B}$
$\forall (A, B) \in M_{n,p}(\mathbb{C}) \times M_{p,q}(\mathbb{C})$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.
On suppose ici que M et M' sont deux matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels et qu'il existe une matrice Q inversible dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $M = QM'(Q^{-1})$.
On obtient
$$M \underset{M \text{ est à coefficients réels}}{=} \overline{M} = \overline{QM'(Q^{-1})} \underset{\text{Lemme}}{=} \overline{Q}\,\overline{M'}\,\overline{(Q^{-1})} \underset{M' \text{ est à coefficients réels}}{=} \overline{Q}M'\overline{(Q^{-1})} \ .$$
De plus $Q(Q^{-1}) = I_n \Rightarrow \overline{Q(Q^{-1})} = \overline{I_n} \underset{\text{Lemme}}{\Rightarrow} \overline{Q}\,\overline{Q^{-1}} = I_n$ ce qui prouve que $\overline{Q^{-1}} = \overline{Q}^{-1}$ et $M = \overline{Q}M'(\overline{Q}^{-1})$.
Considérons l'application Φ de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui même définie par $\Phi : X \mapsto MX - XM'$.
On vérifie très vite que Φ est linéaire . Ainsi $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$ qui contient I_n , Q , $\overline{Q}$ donc aussi les matrices $Q + \overline{Q} - \lambda I_n$ avec λ dans $\mathbb{R}$ qui sont toutes réelles .
On sait que la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{Dét}(Q + \overline{Q} - \lambda I_n)$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) définit le polynôme caractéristique de la matrice réelle $Q + \overline{Q}$. Elle est donc polynomiale de degré n donc elle prend des valeurs non nulles . Il suffit de choisir λ_0 tel que $\mathrm{Dét}(Q + \overline{Q} - \lambda_0 I_n) \neq 0$ et de poser $P = Q + \overline{Q} - \lambda_0 I_n$ pour obtenir $M = PM'(P^{-1})$ et C.Q.F.D. .