

Corrigé PT 2015, épreuve B.

Partie I.

1. On substitue dans le membre de gauche de l'équation de S_1 les coordonnées de M_0 , et on calcule :

$$1 \times (-1)^2 + (-1) \times 2^2 + 2 \times 1^2 + 2 \times 1 \times (-1) \times 2 + 5 = 1 - 4 + 2 - 4 + 5 = 0.$$

Les coordonnées du points M_0 satisfont l'équation de S_1 , donc $M_0 \in S_1$. On vérifie de même que ces coordonnées satisfont l'équation de S_2 , donc $M_0 \in S_2$. Puisque M_0 appartient à S_1 et S_2 , M_0 appartient à Λ , l'intersection de S_1 et S_2 .

2. Notons $h(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz + 5$, de sorte que S_1 admet pour équation $h(x, y, z) = 0$. La fonction h est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}^3$. Calculons ses dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = y^2 + 2xz + 2yz, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 2yx + z^2 + 2xz, \quad \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2zy + x^2 + 2xy,$$

de sorte que le vecteur gradient de h en M_0 admet pour coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}} h(M_0) = (1 + 4 - 4, -2 + 4 + 4, -4 + 1 - 2) = (1, 6, -5).$$

Ce vecteur gradient est non nul, sa direction est donc celle d'une normale au plan tangent à la surface S_1 en M_0 , et on en déduit que ce plan tangent admet pour équation :

$$(x - 1) + 6(y + 1) - 5(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y - 5z = -15.$$

3. Puisqu'elle est définie par une équation linéaire en les coordonnées x , y et z , la surface S_2 est un plan : elle est donc son propre plan tangent en tout point. Au vu de son équation, elle admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2, -3, 1)$. Ce vecteur est non colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}} h(M_0)$ à S_1 en M_0 obtenu à la question précédente. La tangente à la courbe Λ au point M_0 est donc l'intersection du plan S_2 et du plan tangent à S_1 en M_0 , et admet donc pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} x + 6y - 5z = -15 \\ 2x - 3y + z = 7. \end{cases}$$

De plus, cette tangente est donc dirigée par un vecteur orthogonal à $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} h(M_0)$, par exemple le produit vectoriel de ces vecteurs. Calculons les coordonnées de ce produit vectoriel :

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} h(M_0) = (9, 11, 15).$$

La tangente à Λ en M_0 admet donc pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(9, 11, 15)$.

Partie II.

1. (a) Les fonctions coordonnées définissant la courbe Γ sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{*-}$. Calculons le vecteur vitesse en $t \in \mathbf{R}^{*-}$, il s'agit du vecteur de coordonnées :

$$(x'(t), y'(t)) = (2t - 2/t^2, -2/t^3 + 2) = (2 - 2/t^3)(t, 1).$$

On déduit de l'hypothèse $t < 0$ le fait que le facteur $2 - 2/t^3$ est strictement positif, donc non nul, et donc la tangente à Γ au point M_t est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t)$ de coordonnées $(t, 1)$. La normale $N(t)$ à Γ au point M_t est donc dirigée par le vecteur $\vec{n}(t)$ de coordonnées $(1, -t)$. Puisqu'elle passe par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$, cette normale admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_t(u) = t^2 + \frac{2}{t} + u \\ y_t(u) = \frac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases}, u \in \mathbf{R}.$$

(b) La développée de Γ est l'enveloppe des normales. On cherche donc une courbe paramétrée φ définie sur $\mathbf{R}^{*-}$ telle que :

- pour tout t , $\varphi(t)$ appartient à la normale à Γ en M_t , donc il existe $\lambda(t)$ tel que $\varphi(t) = M_t + \lambda(t)\vec{n}(t)$ et la fonction λ est de classe C^1 ;
 - pour tout t , la courbe φ admet pour tangente au point $\varphi(t)$ la droite $N(t)$, soit encore $\det(\varphi'(t), \vec{n}(t)) = 0$.
- Calculons alors :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{dM_t}{dt} + \lambda'(t)\vec{n}(t) + \lambda(t)\vec{n}'(t), \\ \det\left(\frac{dM_t}{dt}, \vec{n}(t)\right) &= \begin{vmatrix} 2t - \frac{2}{t^2} & 1 \\ 2 - \frac{2}{t^3} & -t \end{vmatrix} = \left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(-1 - t^2) \\ \det(\vec{n}'(t), \vec{n}(t)) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = 1.\end{aligned}$$

La condition $\det(\varphi'(t), \vec{n}(t)) = 0$ devient alors (par linéarité à gauche du déterminant, puis antisymétrie), pour tout $t < 0$:

$$\begin{aligned}\det(\varphi'(t), \vec{n}(t)) = 0 &\Leftrightarrow \det\left(\frac{dM_t}{dt}, \vec{n}(t)\right) + \lambda(t)\det(\vec{n}'(t), \vec{n}(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(t) = \left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(1 + t^2)\end{aligned}$$

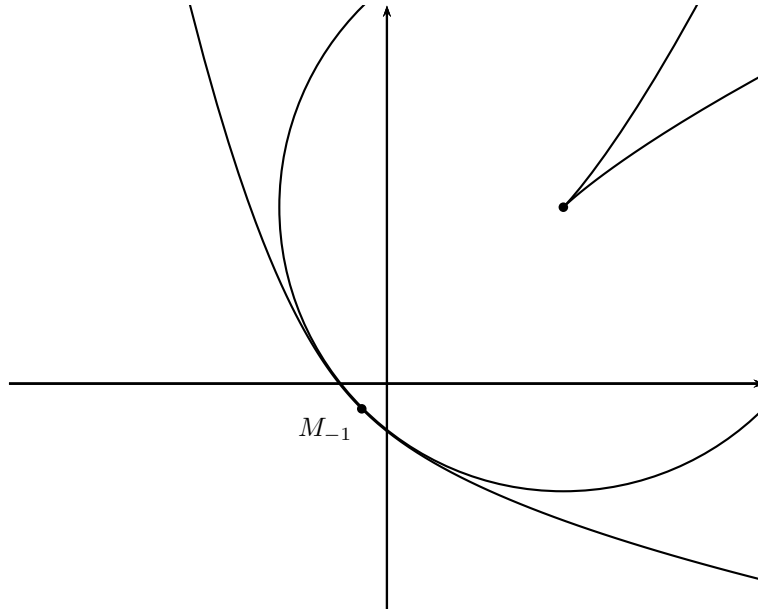
La développée de Γ admet donc pour représentation paramétrique :

$$t \in \mathbf{R}^{*-} \mapsto \left(t^2 + \frac{2}{t} + \left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(1 + t^2), \frac{1}{t^2} + 2t - t\left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(1 + t^2)\right),$$

soit encore :

$$t \in \mathbf{R}^{*-} \mapsto \left(3t^2 + 2 - \frac{2}{t^3}, -2t^3 + 2 + \frac{3}{t^2}\right).$$

(c) Par définition, le centre de courbure de Γ au point M_{-1} est le point de la développée de paramètre -1 : c'est le point de coordonnées $(3 + 2 + 2, 2 + 2 + 3) = (7, 7)$ d'après le résultat de la question précédente. Le rayon du cercle de courbure est alors la distance entre le point M_{-1} , de coordonnées $(-1, -1)$ et le centre de courbure correspondant, et il vaut $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

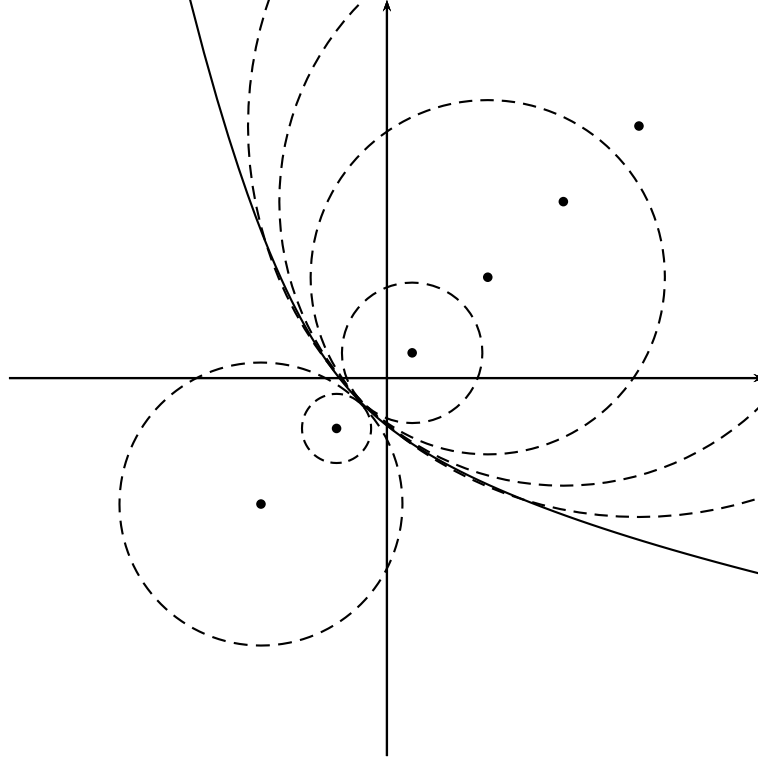


2. (a) La tangente à Γ en M_{-1} est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1)$ de coordonnées $(-1, 1)$. Pour que Σ et Γ soient tangents en M_{-1} , il est nécessaire que M_{-1} appartienne à Σ , ce qui équivaut à $r = \Omega M_{-1} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2}$. Il est encore nécessaire que les vecteurs $\vec{u}(-1)$ et $\overrightarrow{\Omega M_{-1}}$ soient orthogonaux, ce qui équivaut à l'annulation du produit scalaire :

$$\left(\vec{u}(-1) | \overrightarrow{\Omega M_{-1}}\right) = -(-1 - a) + (-1 - b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

En définitive, par définition de la tangence d'un cercle à Γ :

$$\Sigma \text{ et } \Gamma \text{ sont tangents en } M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2}|a+1| \\ b = a. \end{cases}$$



Le cercle Ω pour quelques valeurs de a , dans le cas de tangence en M_{-1} .

(b) En tant que cercle de centre Ω de coordonnées (a, b) et de rayon r , Σ admet pour équation cartésienne $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, ce qui, sous les conditions précédentes, s'écrit encore :

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2(a + 1)^2.$$

On obtient une équation de la forme $f_a(x, y) = 0$ en posant $f_a(x, y) = (x - a)^2 + (y - a)^2 - 2(a + 1)^2$.

(c) Posons $h = t + 1$, de sorte que h tend vers 0 lorsque t tend vers -1 . Alors, en utilisant d'une part le développement de référence de $\frac{1}{1-X}$ et d'autre part celui de $(1 + X)^\alpha$ avec $\alpha = -2$ lorsque X tend vers 0 :

$$\begin{aligned} x(t) = x(h - 1) &= (h - 1)^2 + \frac{2}{h - 1} \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - 2h + h^2 - 2(1 + h + h^2 + h^3 + O(h^4)) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} -1 - 4h - h^2 - 2h^3 + O(h^4) \\ y(t) = y(h - 1) &= \frac{1}{(h - 1)^2} + 2(h - 1) \underset{h \rightarrow 0}{=} -2 + 2h + (1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + O(h^4)) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} -1 + 4h + 3h^2 + 4h^3 + O(h^4) \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement en substituant puis développant qu'on obtient bien alors le développement :

$$f_a(x(t), y(t)) \underset{t \rightarrow -1}{=} (28 - 4a)(t + 1)^2 + (28 - 4a)(t + 1)^3 + o((t + 1)^3).$$

(d) D'après le développement limité obtenu ci-dessus, pour que $f_a(x(t), y(t)) = o((t + 1)^3)$ au voisinage de $t = -1$, il suffit que $28 - 4a = 0$, soit encore $a = 7$. Cette condition est aussi nécessaire par unicité du développement limité.

Dans le cas $a = 7$, Ω est le centre de courbure et r le rayon du cercle de courbure de Γ au point M_{-1} .

Partie III.

1. (a)

Le triangle (ABA') est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$, et le côté (AA') est un diamètre de ce cercle puisque A et A' sont symétriques par rapport à O . On en déduit que le triangle (ABA') est rectangle en B , donc les droites $(AI) = (AB)$ et $(A'B)$ sont perpendiculaires en B , donc $\vec{IA} \cdot \vec{A'B} = 0$. On utilise alors la relation de Chasles et la linéarité à droite du produit scalaire :

$$\vec{IA} \cdot \vec{IB} = \vec{IA} \cdot (\vec{IA'} + \vec{A'B}) = \vec{IA} \cdot \vec{IA'} + \vec{IA} \cdot \vec{A'B} = \vec{IA} \cdot \vec{IA'}.$$

Encore avec la relation de Chasles et par bilinéarité du produit scalaire :

$$\vec{IA} \cdot \vec{IA'} = (\vec{IO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{IO} + \vec{OA'}) = \vec{IO} \cdot \vec{IO} + \vec{IO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OA'}) + \vec{OA} \cdot \vec{OA'}.$$

Puisque O est le milieu du segment $[AA']$, $\vec{OA} + \vec{OA'} = \vec{0}$, d'une part, et, d'autre part, $\vec{OA} \cdot \vec{OA'} = -\vec{OA} \cdot \vec{OA} = -R^2$ puisque A appartient au cercle $\mathcal{C}$, de rayon R de centre O . On a bien ainsi obtenu :

$$\vec{IA} \cdot \vec{IB} = \vec{IA} \cdot \vec{IA'} = IO^2 - R^2.$$

(b) Le signe de $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ code la position du point I par rapport au cercle $\mathcal{C}$: sur le cercle s'il est nul, à l'intérieur du disque délimité par le disque s'il est strictement négatif, et dans le complémentaire de ce disque sinon.

(c) Par définition, outre I et O qui appartiennent à Λ , cet ensemble Λ est l'ensemble des points M tels que les droites (OM) et (IM) sont perpendiculaires en M , c'est-à-dire tels que le triangle (IOM) est rectangle en M . C'est donc le cercle de diamètre $[IO]$. Son centre est donc le milieu du segment $[IO]$, et son rayon est $IO/2$. Puisque le point T appartient à Λ , le triangle (OIT) est rectangle en T , donc, d'après le théorème de Pythagore, $OI^2 = OT^2 + IT^2$. Puisque T appartient à $\mathcal{C}$, $OT = R$. Au vu de l'expression de $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ obtenue à la question (a) :

$$\sigma_{\mathcal{C}}(I) = IO^2 - R^2 = IO^2 - OT^2 = IT^2.$$

2. (a) Par définition et d'après la question (a), $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = IO^2 - R^2$ et $\sigma_{\mathcal{C}'}(I) = (IO')^2 - (R')^2$, et donc, en utilisant dans tout le calcul la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

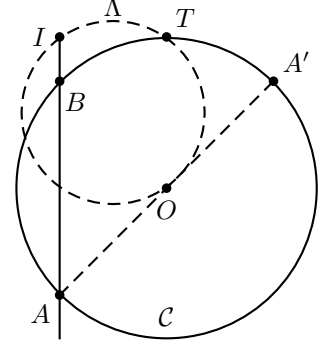
$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{C}}(I) = \sigma_{\mathcal{C}'}(I) &\Leftrightarrow IO^2 - R^2 = (IO')^2 - (R')^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{IO} \cdot \vec{IO} - (\vec{IO'} \cdot \vec{IO'}) = R^2 - (R')^2 \\ (\text{Chasles}) &\Leftrightarrow \vec{IO} \cdot \vec{IO} + 2\vec{IO} \cdot \vec{OO'} + \vec{OO'} \cdot \vec{OO'} - (\vec{IO'} \cdot \vec{IO'} + 2\vec{IO'} \cdot \vec{OO'} + \vec{OO'} \cdot \vec{OO'}) = R^2 - (R')^2 \\ &\Leftrightarrow 2\vec{IO} \cdot (\vec{OO} - \vec{OO'}) + (\vec{OO})^2 - (\vec{OO'})^2 = R^2 - (R')^2 \\ (\text{car } \vec{OO} = \vec{OO'}) &\Leftrightarrow 2\vec{IO} \cdot \vec{O'O} = R^2 - (R')^2 \\ &\Leftrightarrow 2\vec{OO'} \cdot \vec{OI} = R^2 - (R')^2. \end{aligned}$$

(b) De l'hypothèse que I_1 et I_2 appartiennent à Δ , on déduit d'après la question précédente $2\vec{OO'} \cdot \vec{OI_1} = R^2 - (R')^2 = 2\vec{OO'} \cdot \vec{OI_2}$, et donc :

$$0 = 2\vec{OO'} \cdot \vec{OI_1} - 2\vec{OO'} \cdot \vec{OI_2} = 2\vec{OO'} \cdot (\vec{OI_1} - \vec{OI_2}) = 2\vec{OO'} \cdot \vec{I_1I_2},$$

ce dont on déduit, puisque I_1 et I_2 sont supposés distincts, que les droites (I_1I_2) et (OO') sont orthogonales. On munit la droite (OO') du repère $\left(O, \frac{\vec{OO'}}{|\vec{OO'}|}\right)$. Les points O , Ω et O' ont alors pour abscisses respectives 0, $OO'/2$ et OO' . Cherchons l'abscisse x d'un point $I_0 \in \Delta \cap (OO')$. D'après 2(a), on obtient $2OO' \times (x - OO'/2) = R^2 - (R')^2$, donc :

$$x = \frac{OO'}{2} + \frac{R^2 - (R')^2}{2 \times OO'}.$$



On obtient bien ainsi un unique point d'intersection entre Δ et (OO') , qui est le point image de O par la translation de vecteur $\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2 - (R')^2}{2 \times (OO')^2}\right) \overrightarrow{OO'}$.

D'après les point (i) et (ii) de cette question, tous les points de Δ appartiennent à la perpendiculaire à (OO') en I_0 . Réciproquement, soit I un point de cette perpendiculaire. Alors (I_0I) est perpendiculaire à (OO') donc $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{I_0I} = 0$, donc :

$$2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{\Omega I} = 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{\Omega I_0} + 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{I_0I} = R^2 - (R')^2,$$

et donc $I \in \Delta$. Ainsi, Δ est la perpendiculaire à (OO') en I_0 .

(c) Si les deux cercles ont le même rayon, alors le point I_0 est simplement l'image de O par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$, donc le milieu du segment $[OO']$, donc est égal à Ω , et la droite Δ est la perpendiculaire à (OO') en Ω .

Supposons maintenant que les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement. Alors $OO' = R + R'$ et le point I_0 est l'image de O par la translation de vecteur :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2 - (R')^2}{2OO'^2}\right) \overrightarrow{OO'} = \frac{R + R' + R - R'}{2OO'} \overrightarrow{OO'} = R \frac{\overrightarrow{OO'}}{OO'}.$$

Il s'agit donc du point de tangence entre les deux cercles, et la droite Δ est la tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en leur point de tangence.

Dans le cas d'une tangence intérieure, on a la relation $OO' = |R - R'|$. Supposons par exemple $OO' = R - R'$, l'autre cas étant analogue. Alors, le point I_0 est l'image de O par la translation selon le vecteur :

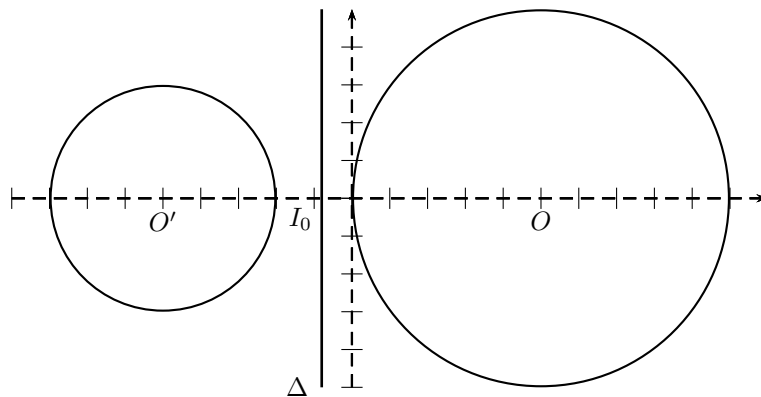
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2 - (R')^2}{2OO'^2}\right) \overrightarrow{OO'} = \frac{R - R' + R + R'}{2OO'} \overrightarrow{OO'} = R \frac{\overrightarrow{OO'}}{OO'},$$

et on retrouve le même résultat.

Dans le cas où les deux cercles sont sécants, on vérifie que la droite Δ est la droite reliant les deux points d'intersection J_1 et J_2 des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. En effet, ces deux points sont bien symétriques par rapport à (OO') , donc la droite (J_1J_2) est perpendiculaire à (OO') d'une part. Et, d'autre part, en notant H le projeté orthogonal de J_1 sur (OO') , le théorème de Pythagore dans le triangle (OJ_1H) rectangle en J_1 donne :

$$\sigma_{\mathcal{C}}(J_1) = J_1O^2 - R^2 = J_1H^2,$$

et on obtient par un calcul analogue la même valeur pour $\sigma_{\mathcal{C}'}(J_1)$, ce qui montre $J_1 \in \Delta$. En tant que droite perpendiculaire à (OO') contenant J_1 , la droite Δ est bien égale à (J_1J_2) .



3. (a) Notons O le centre du cercle $\mathcal{C}$, et R son rayon. D'après la question 1(a) appliquée à la droite (AB) , $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IO^2 - R^2 = \sigma_{\mathcal{C}}(I)$. D'après l'hypothèse $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = \sigma_{\mathcal{C}}(I)$. Or, d'après la question 1(a) appliquée cette fois à la droite (IC) , $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IC'}$, où C' est le deuxième point d'intersection de (IC) avec le cercle $\mathcal{C}$ ($C = C'$ en cas de tangence). Ainsi, $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IC'}$, et donc, les points I, C, D et C' étant alignés, $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IC'}$, ce dont on déduit $D = C'$: le point D appartient bien au cercle $\mathcal{C}$.

(b) On connaît la relation :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Or, $\|\vec{u}\|^2 = |z|^2$, $\|\vec{v}\|^2 = |z'|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = |z + z'|^2$, donc :

$$2\vec{u} \cdot \vec{v} = |z + z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) - |z|^2 - |z'|^2 = z\overline{z'} + z'\overline{z} = z\overline{z'} + \overline{z'}z = 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}),$$

et donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(z\overline{z'}).$$

(c) Les vecteurs $\vec{IA}$, $\vec{IB}$, $\vec{IC}$ et $\vec{ID}$ ont respectivement pour affixes $4 + 8i = 4(1 + 2i)$, $7 + 14i = 7(1 + 2i)$, $6 + 2i = 2(3 + i)$ et $21 + 7i = 7(3 + i)$. Au vu des colinéarités deux à deux de ces vecteurs, les points I , A et B d'une part, et I , C et D d'autre part sont alignés, et :

$$\vec{IA} \cdot \vec{IB} = 28|1 + 2i|^2 = 140, \quad \vec{IC} \cdot \vec{ID} = 14|3 + i|^2 = 140.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la question 3(a) pour déduire de ce qui précède que le point D appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) , donc les points A , B , C et D sont cocycliques.

Partie IV.

1. (a). Soit $x \in \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Alors $f(x) = \lambda x$, donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$, donc $(f^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(f^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)$. On a bien vérifié l'inclusion $\ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \ker(f^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)$. Soit alors λ une valeur propre de f . On en déduit que $\ker(f - \operatorname{Id}_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul, donc, d'après le calcul précédent, il en est de même de $\ker(f^2 - \lambda^2 \operatorname{Id}_E)$, donc λ^2 est valeur propre de f^2 . On a ainsi prouvé que tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2 .

(b) En appliquant le résultat de la question (a) avec $\lambda = 0$, on obtient $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, donc $\dim \ker(f) \leq \dim \ker(f^2)$. Pour obtenir l'inégalité demandée, on va prouver que l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est stricte. D'après l'hypothèse $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$, il existe un vecteur x non nul dans l'intersection $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Ainsi, $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. Mais alors $f^2(y) = f(x) = 0$, donc $y \in \ker(f^2)$, et, puisque $x = f(y)$ est non nul, $y \notin \ker(f)$. Ceci prouve bien que l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est stricte, donc l'inégalité entre les dimensions est stricte : $\dim \ker(f) < \dim \ker(f^2)$. Puisque ces dimensions sont entières :

$$\dim \ker(f) \leq 1 + \dim \ker(f^2).$$

(c) Par définition, $P_f(X) = \det(X \operatorname{Id}_E - f)$ et $P_{f^2}(X^2) = \det(X^2 \operatorname{Id}_E - f^2)$. Or, pour tout $u \in E$:

$$\begin{aligned} (X \operatorname{Id}_E - f) \circ (X \operatorname{Id}_E + f)(u) &= (X \operatorname{Id}_E - f)[Xu + f(u)] = X(Xu + f(u)) - f(Xu + f(u)) \\ &= X^2u + Xf(u) - Xf(u) - f^2(u) \\ &= (X^2 \operatorname{Id}_E - f^2)(u), \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité $(X \operatorname{Id}_E - f) \circ (X \operatorname{Id}_E + f) = (X^2 \operatorname{Id}_E - f^2)$. Le déterminant d'une composée étant le produit des déterminants :

$$P_{f^2}(X^2) = \det(X^2 \operatorname{Id}_E - f^2) = \det(X \operatorname{Id}_E - f) \det(X \operatorname{Id}_E + f) = P_f(X) \det(X \operatorname{Id}_E + f).$$

Enfin, l'espace E étant de dimension d , $\det(X \operatorname{Id}_E + f) = (-1)^d \det((-X) \operatorname{Id}_E - f) = (-1)^d P_f(-X)$, ce qui amène à :

$$P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X) P_f(-X).$$

2. (a) Pour chaque polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, l'expression de $f(P)$ montre qu'il s'agit d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, donc d'un élément de $\mathbf{R}_n[X]$ puisque $n \geq 3$. L'application f est donc définie sur E à valeurs dans E . Vérifions sa linéarité. Il suffit pour cela de savoir que chaque application d'évaluation $P \mapsto P(a)$ est linéaire, et d'utiliser les règles de distributivité dans $\mathbf{R}_n[X]$.

Écrivons $f(P)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$:

$$f(P) = (P(0) + P(1))X^3 + (P(1) + P(-1))X^2 - (P(0) + P(-1))X + P(1) + P(-1). \quad (1)$$

(b) Puisque f est linéaire, l'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$, qui est de dimension 4. De plus, pour tout $P \in E$, d'après l'identité (??), les termes de degré 0 et 2 de $f(P)$ sont égaux. Ainsi, $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace du sous-espace de E engendré par X^3 , X et $1 + X^2$: $\operatorname{Vect}(X^3, X, 1 + X^2)$. De plus, $f(X) = X^3 + X \in \operatorname{Im}(f)$, $f(1 - X^2) = X^3 - X \in \operatorname{Im}(f)$, donc X^3 et X appartiennent à $\operatorname{Im}(f)$ en tant que

combinaisons linéaires des deux vecteurs précédents ; enfin, $f(1) = 2X^3 + 2X^2 - 2X + 2$, donc, puisque X^3 et X appartiennent aussi à $\text{Im}(f)$, c'est encore le cas de $2(X^2 + 1)$ donc de $X^2 + 1$. En définitive, $\text{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$ engendré par $(X^3, X^2 + 1, X)$, et il est de dimension 3.

La formule du rang assure alors que $\ker(f)$ est de dimension $\dim E - \dim \text{Im}(f) = n - 2$.

En exploitant à nouveau l'expression ??, par liberté de la famille $(1, X, X^2, X^3)$, on obtient l'équivalence, pour $P \in E$:

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) + P(1) = 0 & L_1 \\ P(1) + P(-1) = 0 & L_2 \\ P(0) + P(-1) = 0 & L_3 \\ P(1) + P(-1) = 0 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = -P(0) & L_1 \\ P(-1) = -P(0) & L_3 \\ -2P(0) = 0 & L_2 = L_4 \end{cases} \Leftrightarrow P(0) = P(1) = P(-1).$$

Ainsi, le noyau de f est l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ qui admettent $-1, 0$ et 1 comme racines. On peut savoir (ou non), qu'il s'agit de l'ensemble des multiples du polynôme $X(X-1)(X+1)$.

(c) L'endomorphisme f n'est pas injectif, puisque le polynôme non nul X par exemple appartient à son noyau. Il n'est pas surjectif puisque $\dim \text{Im}(f) = 3 < \dim E = n + 1$ d'après la question (b). On peut aussi déduire du résultat de la question (b) que $\text{Im}(f)$ ne contient pas de polynôme constant non nul.

(d) Puisque f n'est pas injectif, il admet 0 comme valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à 0 est, d'après la question b, égale à $n - 2$, donc la multiplicité de 0 en tant que valeur propre de f est supérieure ou égale à $n - 2$.

(e) Calculons $f(Q_1)$ et $f(Q_2)$.

$$f(Q_1) = (X^2 - X + 1) \times 8 + (X^3 - X) \times 4 + (X^3 + X^2 + 1) \times 8 = 12X^3 + 16X^2 - 12X + 16 = 4Q_1(X),$$

$$f(Q_2) = (X^2 - X + 1) \times (-2) + (X^3 - X) \times 0 + (X^3 + X^2 + 1) \times 2 = 2X^3 + 2X = 2Q_2(X).$$

Les polynômes Q_1 et Q_2 étant non nuls, ces relations montrent que ce sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 4 et 2 .

(f) D'après les résultats de la question (b), le polynôme $X^3 - X$ appartient à $\ker(f) \cap \text{Im}(f)$, ce qui montre que la relation $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ n'est pas satisfaite.

(g) D'après la question 1(a), tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2 . Puisque $0, 2$ et 4 sont valeurs propres de f , $0, 4$ et 16 sont des valeurs propres de f^2 . De plus, d'après la question 2(f), $\ker(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0\}$, et donc, d'après la question 1(b), $\dim \ker(f^2) \geq \dim \ker(f) + 1 = n - 1$. Les sous-espaces propres de f^2 associés à 4 et 16 étant de dimension au moins 1 , la somme des dimensions des sous-espaces propres de f^2 est supérieure ou égale à $n - 1 + 1 + 1 = n + 1 = \dim(E)$. On en déduit que f^2 est diagonalisable, et n'admet aucune autre valeur propre que $0, 4$ et 16 . De plus :

$$\dim \ker(f^2) = n - 1, \quad \dim \ker(f^2 - 4\text{Id}_E) = 1, \quad \dim \ker(f^2 - 16\text{Id}_E) = 1.$$

(h) Puisque f^2 est diagonalisable, le polynôme caractéristique $P_{f^2}(X)$ est scindé, et, au vu des dimensions des sous-espaces propres :

$$P_{f^2}(X) = X^{n-1}(X-4)(X-16).$$

Ainsi, $P_{f^2}(X^2) = X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16)$, et donc, en utilisant 1(c) :

$$P_f(X)P_f(-X) = (-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4).$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ divise donc $(-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4)$, qui est un polynôme scindé. Ainsi, $P_f(X)$ est scindé, donc f est trigonalisable.

Montrons que f n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde : si f est diagonalisable, alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f . Puisque $\ker(f)$ est de dimension $n - 2$, on peut choisir une telle base $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $f(P_i) = 0$ pour $i \leq n - 3$ et $f(P_i) = \lambda_i P_i$ pour $i \geq n - 2$ avec λ_i valeur propre non nulle de f . Mais alors, $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est encore une base de vecteurs propres pour f^2 : les valeurs propres associées sont 0 pour $i \leq n - 3$ et $\lambda_i^2 \neq 0$ pour $i \geq n - 2$, donc $\dim \ker(f^2) = n - 2$, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question (g). On a ainsi établi que f n'est pas diagonalisable.

On sait déjà que $0, 2$ et 4 sont valeurs propres de f , la dimension du sous-espace propre associé à 0 est $n - 2$.

Si f admettait une autre valeur propre, la somme des dimensions des sous-espaces propres serait supérieure ou égale à $n + 1$, ce dont on pourrait déduire que f est diagonalisable. Ainsi, les seules valeurs propres de f sont 0, 2 et 4, et les dimensions des sous-espaces propres sont pour la même raison (non diagonalisabilité de f) $n - 2$, 1 et 1. Le sous-espace propre associé à 0 est l'ensemble des multiples de $X(X - 1)(X + 1)$, le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par Q_2 , et celui associé à 4 est la droite vectorielle engendrée par Q_1 .