

Exercice 1.

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique. Soit $a \in \mathbb{R}$. On utilise la relation de Chasles puis le changement de variable $t = u + T$, $dt = du$, et la T -périodicité de f :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t)dt &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt = -\int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(u+T)du \\ &= -\int_0^a f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(u)du = \int_0^T f(t)dt. \end{aligned}$$

Donc $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$

2. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique et dérivable :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

En dérivant cette égalité, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+T) = f'(x),$$

donc f' est T -périodique. Si f est T -périodique, alors f' est T -périodique.

Montrons que la réciproque est fautive. Soit $T > 0$. Posons $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t.$ On a $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t) + T \neq f(t)$ donc f n'est pas T -périodique, cependant f est de classe \mathcal{C}^∞ et sa dérivée $f'(t) = 1$ est T -périodique.

La réciproque est fautive : il existe f dérivable sur \mathbb{R} telle que f' est T -périodique mais f n'est pas T -périodique.

3. f est continue sur \mathbb{R} donc elle admet une primitive F de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt = [F(t)]_{x-1}^x = F(x) - F(x-1).$$

Donc $U(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1). \quad \boxed{U(f)'(x) = f(x) - f(x-1).}$$

4. Soit $f \in \mathcal{E}$. On a montré en question 3. que $U(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc $U(f)$ est une fonction continue. Ainsi $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Montrons que U est linéaire. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}^2$. Alors par linéarité de l'intégrale, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$U(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \int_{x-1}^x (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)dt = \lambda_1 \int_{x-1}^x f_1(t)dt + \lambda_2 \int_{x-1}^x f_2(t)dt = (\lambda_1 U(f_1) + \lambda_2 U(f_2))(x),$$

donc U est linéaire. Ainsi $U : \begin{matrix} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ f & \mapsto & U(f) \end{matrix}$ est un endomorphisme de \mathcal{E} .

- 5.

- 5.1. Soit $0 \leq k \leq n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(X^k)(x) = \int_{x-1}^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{x-1}^x = \frac{x^{k+1} - (x-1)^{k+1}}{k+1}.$$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(X^k)(x) = \frac{1}{k+1} \left(x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i (-1)^{k+1-i} \right) = \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} x^i (-1)^{k+i} \right).$$

On a donc

$$U(X^k) = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k+i} X^i \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par U .

Ainsi la restriction de U à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme U_n de E_n .

5.2. Notons $A = (a_{i,k})_{1 \leq i, k \leq n+1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(U_n)$ la matrice de U_n dans la base canonique \mathcal{B}_n de $\mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U_n(X^k) = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k+i} X^i = \sum_{i=0}^n a_{i+1, k+1} X^i.$$

Pour $i+1 < k+1$, on a donc $a_{i+1, k+1} = \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k+i}$. Donc les coefficients de la matrice A vérifient

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \begin{cases} a_{i,i} &= 1 \\ a_{i,k} &= \frac{1}{k} \binom{k}{i-1} (-1)^{k+i} & \text{si } i < k, \\ a_{i,k} &= 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$

Remarquons que la matrice A est triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale et des coefficients tous non nuls au-dessus de la diagonale.

5.3. La matrice de U_n est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc $\text{Sp}(U_n) = \{1\}$.

Puisque 0 n'est pas une valeur propre de U_n , $\text{Ker}(U_n) = \{0\}$ donc U_n est injectif. Puisque $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $(n+1)$, l'injectivité équivaut à la surjectivité, donc l'endomorphisme U_n est bijectif.

Supposons par l'absurde U_n diagonalisable. Alors sa matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(U_n)$ est également diagonalisable. Puisque 1 est la seule valeur propre, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ avec des 1 sur la diagonale, donc elle A est semblable à la matrice identité I_{n+1} . Donc il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = I_{n+1}$, donc $A = PI_{n+1}P^{-1} = I_{n+1}$, ce qui est absurde car A possède au moins un coefficient non nul au-dessus de la diagonale.

D'où l'endomorphisme U_n n'est pas diagonalisable.

6. Soit $f \in \text{Ker}(U)$. Alors $U(f) = 0$.

(i) On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = 0$. En particulier, pour $x = 1$, on a : $U(f)(1) = \int_0^1 f(t)dt = 0$.

(ii) Puisque $U(f)$ est nulle et de classe \mathcal{C}^1 , on a également $U(f)' = 0$.

D'après la question 3. : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)'(x) = f(x) - f(x-1) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$. Ainsi $U(f)$ est périodique de période 1.

7. On a montré que si $f \in \text{Ker}(U)$, alors f vérifie (i) et (ii). Réciproquement, soit $f \in \mathcal{E}$ vérifiant (i) et (ii). Puisque f est 1-périodique, on applique le résultat de la question 1. avec $T = 1$ et $a = x - 1$. Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt = \int_{(x-1)}^{(x-1)+1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 0$$

puisque f vérifie (ii). Donc $U(f) = 0$ et $f \in \text{Ker}(U)$. On a montré que la réponse est oui :

$$\text{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

8. Posons $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \cos(2\pi t)$. Vérifions que $f \in \text{Ker}(U)$. Par 2π -périodicité de la fonction sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt = \int_{x-1}^x \cos(2\pi t)dt = \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} \right]_{x-1}^x = \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi x) - \sin(2\pi x - 2\pi)) = 0.$$

Donc $U(f) = 0$ et $f \in \text{Ker}(U)$. La fonction de \mathcal{E} définie par $f : t \mapsto \cos(2\pi t)$ est non nulle et dans $\text{Ker}(U)$. (Représentation graphique à faire.)

9. Soit $g(x) = |x|$ la fonction valeur absolue sur \mathbb{R} . Alors g est continue sur \mathbb{R} mais g n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car n'est pas dérivable en 0.

Or $\forall f \in \mathcal{E}, U(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Donc $g \in \mathcal{E}$ mais g n'est pas dans l'image de U . D'où l'endomorphisme U n'est pas surjectif.

10.

10.1. On a $\forall t \in \mathbb{R}, f_a(t) = e^{at}$. Déterminons F_a . Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^x f_a(t)dt = \int_{x-1}^x e^{at}dt = \left[\frac{e^{at}}{a} \right]_{x-1}^x = \frac{1}{a}(e^{ax} - e^{a(x-1)}) = \frac{e^{-a} - 1}{-a}e^{ax} = \frac{e^{-a} - 1}{-a}f_a(x).$$

Donc $F_a = U(f_a) = \frac{e^{-a} - 1}{-a}f_a.$

10.2. On a $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Lorsque $x \rightarrow 0$, on a

$$g(x) = \frac{1 + x + o(x) - 1}{x} = 1 + o(1) \rightarrow 1,$$

donc g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{1}{x^2}(e^x x - (e^x - 1)) = \frac{1}{x^2}(1 + (x - 1)e^x) = \frac{h(x)}{x^2},$$

en posant $h(x) = 1 + (x - 1)e^x$. De plus, lorsque $x \rightarrow 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + (-1 + x) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \right) = \frac{1}{x^2} \left(1 - 1 + x - x + x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{1}{2} + o(1).$$

$g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ donc g est dérivable en 0 avec $g'(0) = \frac{1}{2}$.

h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = xe^x$. On obtient le tableau de variations de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$		↘	↗
		0	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) > 0$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) > 0$ avec $g'(0) = \frac{1}{2} > 0$. Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$.

On obtient le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	1/2	+
$g(x)$		↗	↗
	0	1	$+\infty$

Ainsi g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

10.3. D'après la question **10.1.**, on a $F_a = U(f_a) = \frac{e^{-a} - 1}{-a}f_a = g(-a)f_a$.

D'après la question **10.2.**, la fonction g est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$.

Soit $\lambda > 0$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$, tel que $g(-a) = \lambda$.

Alors $U(f_a) = g(-a)f_a = \lambda f_a$ où f_a est une fonction non nulle, donc f_a est un vecteur propre de l'endomorphisme U , associé à la valeur propre λ .

Ainsi tout réel λ strictement positif est une valeur propre de l'endomorphisme U .

Exercice 2.

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ donc

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, P(X_1 = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

On a :

$$[X_2 = 0] = [X_1 = 0] \sqcup \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} [X_1 = 2n + 1].$$

Puisque l'union est disjointe :

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = 2n + 1) = e^{-\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On reconnaît le développement en série entière du sinus hyperbolique :

$$P(X_2 = 0) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \text{sh}(\lambda) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{2}.$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[X_2 = n] = \left[X_2 = \frac{2n}{2} \right] = [X_1 = 2n], \quad \text{donc} \quad P(X_2 = n) = P(X_1 = 2n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}.$$

On en déduit que la loi de la variable aléatoire X_2 est :

$$X_2(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X_2 = 0) = \frac{1 + 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_2 = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}.$$

2.

$$E(X_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (2n) \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!}.$$

L'espérance de X_2 existe car on reconnaît la série définissant le sinus hyperbolique :

$$E(X_2) = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n+2}}{(2n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \text{sh}(\lambda).$$

On a ainsi

$$E(X_2) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \text{sh}(\lambda) = \frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2\lambda}).$$

Exercice 3.

- Soit T une matrice n'appartenant pas à H .
Soit $A \in H \cap \text{Vect}(T)$. Puisque $A \in \text{Vect}(T)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda T$.
Or $A = \lambda T \in H$ avec $T \notin H$, donc $\lambda = 0$ et $A = 0$.
Ainsi $H \cap \text{Vect}(T) = \{0\}$ et la somme est directe. De plus,

$$\dim(H \oplus \text{Vect}(T)) = \dim(H) + \dim \text{Vect}(T) = (n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim(E_n),$$

donc $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$.

- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ donc $\forall r \geq 1, E_{i,i}^r = E_{i,i} \neq 0$. Donc $E_{i,i}$ n'est pas nilpotente.
Soit $i \neq j$ deux indices dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $E_{i,j}^2 = 0$ donc $E_{i,j}$ est nilpotente (d'indice de nilpotence 2).

Les matrices nilpotentes de la base canonique \mathcal{B} sont les $\{E_{i,j}, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j\}$.

- Soit A une matrice nilpotente. Il existe $r \geq 1$ tel que $A^r = 0$. Le polynôme $P(X) = X^r$ annule la matrice A , donc $\text{Sp}(A) \subset \text{Racines}(P) = \{0\}$.

Puisque le spectre complexe de A est non vide, on a $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

La seule valeur propre d'une matrice nilpotente est 0.

4. Posons $J = \sum_{1 \leq i, j \leq n} E_{i, j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On remarque que

$$U + I_n = \sum_{i < j} (E_{i, j} + E_{j, i}) + \sum_{i=1}^n E_{i, i} = J,$$

donc $U = J - I_n$.

La matrice J est de rang 1 donc par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(J)) = n - 1$. 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$ dans χ_J . De plus $\text{Tr}(J) = n = (n - 1) \times 0 + 1 \times n$ est la somme des valeurs propres donc n est aussi valeur propre. Ainsi $\text{Sp}(J) = \{n, 0\}$.

J est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale, donc $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), P^{-1}JP = \text{Diag}(n, 0, \dots, 0)$. Or $U = J - I_n$ donc $P^{-1}UP = P^{-1}JP - I_n = \text{Diag}(n, 0, \dots, 0) + \text{Diag}(1, \dots, 1) = \text{Diag}(n + 1, 1, \dots, 1)$.

$\text{Sp}(U) = \{n + 1, 1\}$. Ainsi $0 \notin \text{Sp}(U)$ donc $\text{Ker}(U) = \{0\}$ et U est inversible.

5.

5.1. La matrice identité est inversible, or on suppose que H ne contient pas de matrice inversible, donc $I_n \notin H$.

D'après la question 1 appliquée avec $T = I_n$, on a $M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \text{Vect}(I_n)$ donc toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme d'une somme d'une matrice de H et d'une matrice de $\text{Vect}(I_n)$.

En particulier, N s'écrit sous la forme $N = A + B$ avec $A \in H$ et $B \in \text{Vect}(I_n)$.

Donc $\exists A \in H, \exists \alpha \in \mathbb{R}, N = A + \alpha I_n$.

5.2. $A \in H$ or par hypothèse, H ne contient pas de matrice inversible, donc A n'est pas inversible. Par suite $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre de A .

N est nilpotente donc $\exists r \geq 1, N^r = (A + \alpha I_n)^r = 0$, donc le polynôme $P(X) = (X + \alpha)^r$ annule la matrice A . On en déduit que $\text{Sp}(A) \subset \text{Racines}(P) = \{-\alpha\}$.

Puisque 0 est valeur propre de A , on a nécessairement $\alpha = 0$. D'où $N = A \in H$.

6. Supposons par l'absurde que H ne contient pas de matrice inversible, alors on vient de montrer que toute matrice nilpotente appartient à H .

Alors les matrices $(E_{i, j})_{i \neq j}$ sont toutes dans H . En particulier, leur somme $U = \sum_{i < j} (E_{i, j} + E_{j, i})$ est une somme

de matrices de H , or H est un sous-espace vectoriel, donc $U \in H$, ce qui est absurde puisqu'on a montré à la question 4 que U est inversible.

Ainsi tout hyperplan H de E_n contient au moins une matrice inversible.

7. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques de E_n .

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication des matrices et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n = 2$, $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3 = 4 - 1$, donc $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de E_2 stable pour la multiplication matricielle.

8.

8.1. On suppose par l'absurde que $I_n \notin H$. D'après la question 1., on a $E_n = \text{Vect}(I_n) \oplus H$, et on peut définir la projection p sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H .

Soit $(M, N) \in E_n^2$. On utilise la décomposition en somme directe $E_n = \text{Vect}(I_n) \oplus H$:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists A_1 \in H, \quad M &= \lambda_1 I_n + A_1 && \text{avec } p(M) = \lambda_1 I_n. \\ \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}, \exists A_2 \in H, \quad M &= \lambda_2 I_n + A_2 && \text{avec } p(M) = \lambda_2 I_n. \end{aligned}$$

Il vient

$$MN = (\lambda_1 I_n + A_1)(\lambda_2 I_n + A_2) = \underbrace{\lambda_1 \lambda_2 I_n}_{\in \text{Vect}(I_n)} + \underbrace{\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_1 + A_1 A_2}_{\in H},$$

car H est un sous-espace vectoriel stable pour la multiplication matricielle, donc $A_1 A_2 \in H$.

On en déduit que $p(MN) = \lambda_1 \lambda_2 I_n = (\lambda_1 I_n)(\lambda_2 I_n) = p(M)p(N)$.

D'où $\forall (M, N) \in E_n^2, p(MN) = p(M)p(N)$.

8.2. Soit $M \in E_n$ telle que $M^2 \in H$. La décomposition $M^2 = 0 + M^2$ avec $0 \in \text{Vect}(I_n)$ et $M^2 \in H$ donne $p(M^2) = 0$. D'après la question 8.1., on a $0 = p(M^2) = p(M)^2$. Notons $M = \lambda I_n + A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, A \in H$, alors $p(M) = \lambda I_n$

donc $0 = p(M)^2 = (\lambda I_n)^2 = \lambda^2 I_n$ donc $\lambda = 0$. On en déduit que $p(M) = 0$ puis $M \in H$.

Ainsi $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.

8.3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Premier cas. On suppose que $i \neq j$. On a $(E_{i,j})^2 = 0 \in H$ puisque H est un sous-espace vectoriel.

D'après la question 8.2., $(E_{i,j})^2 \in H \Rightarrow E_{i,j} \in H$.

Deuxième cas. On suppose que $i = j$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque $n = 2$, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

Or H est stable par multiplication matricielle et contient $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ donc $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \in H$.

Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_{i,j} \in H$.

8.4. **Preuve 1 :** on a alors $I_n = E_{1,1} + \dots + E_{n,n} \in H$ car H est stable par combinaison linéaire, ce qui est absurde puisque l'on a supposé que $I_n \notin H$.

Preuve 2 : on a $E_n = \text{Vect}(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n) \subset H \subset E_n$, donc $H = E_n$ ce qui est absurde puisque H est un hyperplan de E_n .

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction donc $I_n \in H$.

9.

9.1. On note H^\perp l'orthogonal de H pour le produit scalaire de l'énoncé $(\cdot | \cdot)$.

A est une matrice non nulle de l'orthogonal de $H : A \in H^\perp$.

Montrons tout d'abord que $H^\perp = \text{Vect}(A)$.

D'après le cours, H^\perp est un supplémentaire de H , or H est un hyperplan de E_n donc son orthogonal est de dimension 1. Puisque $A \in H^\perp$ avec $A \neq 0$, on en déduit que (A) est une base de H^\perp , donc on a $H^\perp = \text{Vect}(A)$.

On fixe maintenant $B \in H$ quelconque. Soit $C \in H$. Puisque H est stable pour la multiplication des matrices, la matrice CB est encore dans H .

Or $A \in H^\perp$ donc le produit scalaire suivant est nul :

$$0 = (A|CB) = \text{Tr}(A^T CB) = \text{Tr}(BA^T C) = \text{Tr}\left(\left(AB^T\right)^T C\right) = (AB^T|C).$$

On vient de montrer que $\forall C \in H, (AB^T|C) = 0$, autrement dit $AB^T \in H^\perp = \text{Vect}(A)$.

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, AB^T = \lambda A$. En transposant, il vient : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, BA^T = \lambda A^T$.

En d'autres termes, pour tout $B \in H, BA^T$ est colinéaire à A^T .

9.2. Dans un premier temps, montrons que H contient au moins une matrice non nulle et non inversible.

Posons $K = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}) \subset E_n$ (c'est possible car $n \geq 2$). On a $\dim(K) = 2$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in K$, alors A est triangulaire supérieure avec $a_{2,2} = 0$, donc $\det(A) = 0$ et A n'est pas inversible. Ainsi K est constitué de matrices non inversibles.

Supposons par l'absurde H et K en somme directe. Alors on aurait

$$\dim(H \oplus K) = \dim(H) + \dim(K) = (n^2 - 1) + 2 = n^2 + 1 > n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R})),$$

ce qui est absurde. Donc la somme n'est pas directe, $H \cap K \neq \{0\}$,

et H contient au moins une matrice non nulle et non inversible.

Supposons par l'absurde A^T inversible.

On fixe une matrice $B \in H$ non nulle et non inversible. Alors son rang vérifie $1 \leq \text{rg}(B) \leq n - 1$.

Puisque A^T est inversible, la multiplication à droite par A^T ne modifie pas le rang, donc $\text{rg}(BA^T) = \text{rg}(B)$.

D'après la question 1., BA^T est colinéaire à A^T donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA^T = \lambda A^T$.

Si $\lambda = 0$, on obtient $\text{rg}(B) = \text{rg}(BA^T) = \text{rg}(0) = 0$, ce qui est absurde car $\text{rg}(B) \geq 1$.

Si $\lambda \neq 0$, on obtient $\text{rg}(B) = \text{rg}(BA^T) = \text{rg}(\lambda A^T) = \text{rg}(A^T) = n$, ce qui est absurde car $\text{rg}(B) \leq n - 1$.

On aboutit à une contradiction donc A^T n'est pas inversible.

9.3. Soit $B \in H$. Montrons que W est stable par B .

Soit $x \in W = \text{Im}(A^T)$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = A^T y$.

De plus, d'après la question 9.1., $\exists \lambda \in \mathbb{R}, BA^T = \lambda A^T$. Il vient

$$Bx = B(A^T y) = (BA^T)y = \lambda A^T y = \lambda x \in \text{Vect}(x) \subset W.$$

Ainsi $\forall x \in W, Bx \in W$, donc W est stable par B .

Finalement, on a montré que W est stable pour tous les éléments de H .

9.4. P est une matrice de passage donc est bien inversible.

L'application $\varphi_P : \begin{cases} E_n \rightarrow E_n \\ M \mapsto P^{-1}MP \end{cases}$ est clairement linéaire car la multiplication matricielle à gauche ou à droite est linéaire, donc φ_P est un endomorphisme de E_n .

Montrons que cet endomorphisme est bijectif. Pour cela on remarque par exemple que $\varphi_{P^{-1}} : \begin{cases} E_n \rightarrow E_n \\ M \mapsto PMP^{-1} \end{cases}$ vérifie :

$$\forall M \in E_n, \quad \varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P(M) = \varphi_{P^{-1}}(P^{-1}MP) = P(P^{-1}MP)P^{-1} = M = \text{Id}_{E_n}(M),$$

donc $\varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P = \text{Id}_{E_n}$, ce qui prouve que φ_P est bijective et que sa bijection réciproque est $\varphi_{P^{-1}}$.

Donc $\varphi_P : \begin{cases} E_n \rightarrow E_n \\ M \mapsto P^{-1}MP \end{cases}$ est un automorphisme de E_n .

9.5. D'après les notations de l'énoncé, (e_1, \dots, e_p) est une base de $W = \text{Im}(A^T)$, que l'on a complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n .

P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à \mathcal{B}_1 .

En particulier, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est la matrice dans la base \mathcal{B}_1 de l'endomorphisme $x \mapsto Mx$ canoniquement associé à la matrice M .

Soit $B \in H$. On a montré que W est stable pour tous les éléments de H , donc W est stable par B . Par suite, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, puisque $e_i \in W$, on en déduit que $Be_i \in W = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Autrement dit, la matrice $P^{-1}BP$ dans \mathcal{B}_1 de l'endomorphisme canoniquement associé à B est de la forme :

$$P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad A_1 \in M_p(\mathbb{R}), A_2 \in M_{p, n-p}(\mathbb{R}), A_3 \in M_{n-p}(\mathbb{R}).$$

Remarquons que le nombre de coefficients nuls dans la matrice ci-dessus vaut $p(n-p)$.

On a donc montré que l'ensemble des $P^{-1}BP$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $E_{i,j}$ suivants :

$$\varphi_P(H) = \{\varphi_P(B), B \in H\} = \{P^{-1}BP, B \in H\} \subset \text{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \llbracket n-p+1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket).$$

D'après la question 9.4., φ_P est un automorphisme de E_n , d'où

$$\dim(H) = \dim(\varphi_P(H)) \leq \dim \text{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \llbracket n-p+1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket) = n^2 - p(n-p).$$

Finalement $\dim(H) \leq n^2 - p(n-p)$.

10. On a montré que :

$$\dim(H) = n^2 - 1 \leq n^2 - p(n-p), \quad \text{donc} \quad p(n-p) \leq 1.$$

Or $p(n-p) \in \mathbb{N}$ donc $p(n-p)$ vaut 0 ou 1.

Supposons que $p(n-p) = 0$, alors on a soit $p = 0$, soit $n-p = 0$.

Si $p = 0$, alors $A^T = 0$ donc $A = 0$ ce qui est exclu.

Si $n-p = 0$, alors $p = n \leq n-1$, ce qui est absurde. En effet A^T n'est pas inversible d'après la question 9.2, donc $p = \text{rg}(A^T) \leq n-1$.

Par suite $p(n-p) \neq 0$ donc $p(n-p) = 1$. On en déduit que $p = 1$ et $n-p = 1$ soit $n = p+1 = 2$.

On a démontré que $n = 2$.

Exercice 4.

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

De plus $u_0 = a > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 > 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Supposons par l'absurde que la suite (u_n) converge vers un réel l , alors par passage à la limite il vient $l = l + l^2$ donc $l = 0$. Ceci est absurde car $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante.

Ainsi la suite (u_n) diverge, donc est une suite croissante non majorée. La suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2.

2.1. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+p+1} - v_{n+p} &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^{n+p}} \ln(u_{n+p}) = \frac{1}{2^{n+p+1}} (\ln(u_{n+p+1}) - 2 \ln(u_{n+p})) \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(\frac{u_{n+p+1}}{(u_{n+p})^2} \right) = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(\frac{u_{n+p} + (u_{n+p})^2}{(u_{n+p})^2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right). \end{aligned}$$

On a montré que (u_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Alors $\frac{1}{u_{n+p}} > 0$ et $\ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right) > 0$, d'où $v_{n+p+1} - v_{n+p} > 0$.

D'autre part, par croissance de (u_n) , on a $u_{n+p} \geq u_n$ donc $\frac{1}{u_{n+p}} \leq \frac{1}{u_n}$. Par croissance du logarithme, on obtient

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right) \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

Donc $\boxed{\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)}$.

2.2. Soient n et k deux entiers naturels fixés. On a :

$$v_{n+k+1} - v_n = \sum_{p=0}^k (v_{n+p+1} - v_{n+p}).$$

On somme les inégalités de la question **2.1.** pour p allant de 0 à k .

$$0 < v_{n+k+1} - v_n = \sum_{p=0}^k (v_{n+p+1} - v_{n+p}) \leq \sum_{p=0}^k \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right) \sum_{p=0}^k \frac{1}{2^p}.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $1/2$:

$$\sum_{p=0}^k \frac{1}{2^p} = \frac{1 - (1/2)^{k+1}}{1 - 1/2} = 2(1 - (1/2)^{k+1}) \leq 2.$$

On obtient

$$\boxed{\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)}.$$

2.3. On applique la question **2.2** avec $k = 0$ et $n \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_{n+1} - v_n$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}}$

On applique la question **2.2** avec $n = 0$ et $k \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, v_{k+1} - v_0 \leq \frac{1}{2^0} \ln \left(1 + \frac{1}{u_0} \right)$.

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_{k+1} \leq v_0 + \ln \left(1 + \frac{1}{a} \right) = \ln(a) + \ln \left(1 + \frac{1}{a} \right) = \ln(a+1).$$

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est croissante et majorée par } \ln(a+1), \text{ donc converge vers une limite } L}$.

3. On a $t_n = e^{2^n L}$ et $u_n = e^{2^n v_n}$, d'où :

$$\frac{t_n}{u_n} = \frac{e^{2^n L}}{e^{2^n v_n}} = \exp(2^n(L - v_n)).$$

Dans l'inégalité de la question **2.2.**, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on fait tendre $k \rightarrow +\infty$. Puisque la suite (v_p) converge vers L ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq L - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

En multipliant par 2^n , il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 2^n(L - v_n) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 = e^0 \leq \frac{t_n}{u_n} = \exp(2^n(L - v_n)) \leq 1 + \frac{1}{u_n}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{1 \leq \frac{t_n}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}}.$$

Puisque $u_n \rightarrow +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{u_n} = 1$ donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n}$.

4.

4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $s_n = t_n - u_n = e^{2^n L} - u_n$, on a :

$$s_{n+1} = t_{n+1} - u_{n+1} = e^{2^{n+1}L} - (u_n)^2 - u_n = \left(e^{2^n L} \right)^2 - (u_n)^2 - u_n = (s_n + u_n)^2 - (u_n)^2 - u_n = (s_n)^2 + 2s_n u_n - u_n.$$

On a la relation $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} = (s_n)^2 + (2s_n - 1)u_n}$.

4.2. Dans la question **3.**, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{t_n}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$, donc

$$0 \leq \frac{t_n}{u_n} - 1 = \frac{t_n - u_n}{u_n} = \frac{s_n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n}.$$

Puisque $u_n \geq u_0 > 0$: $\boxed{0 \leq s_n \leq 1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (s_n) \text{ est bornée.}}$

4.3. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq s_n \leq 1$, d'où également $0 \leq (s_n)^2 \leq 1$ et $-1 \leq s_{n+1} - (s_n)^2 \leq 1$. Ainsi la suite $s_{n+1} - (s_n)^2$ est bornée. Or on a obtenu en question **4.1.** la relation

$$(2s_n - 1)u_n = s_{n+1} - (s_n)^2,$$

donc la suite $(2s_n - 1)u_n$ est bornée avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par la question **1.**

Ceci n'est possible que si $2s_n - 1 \rightarrow 0$, donc $\boxed{\text{la suite } (s_n) \text{ converge vers } 1/2}$.

Finalement $t_n - u_n = s_n = \frac{1}{2} + o(1)$, autrement dit $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} t_n - \frac{1}{2} + o(1)}$.