MATRICES QUASI-NILPOTENTES

Mathématiques 2, PSI

1 EXEMPLES

1) Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est X^2+1. Elle ne possède aucune valeur propre réelle, donc a fortiori aucune valeur propre non nulle dans $\mathbf{R}$. D n'est pas quasi-nilpotente.
Sur $\mathbf{C}$, les valeurs propres sont $\pm i$, toutes deux non nulles, D n'est donc pas quasi-nilpotente sur $\mathbf{C}$.

2) On constate facilement que le polynôme caractéristique de B est X^2, l'unique valeur propre est donc 0. B est donc quasi-nilpotente en tant que matrice de $M_2(\mathbf{C})$.

3) Par exemple pour $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$: la propriété d'espace vectoriel découle de linéarité de la transposition et de ce que la matrice nulle est symétrique. Si ${}^{\mathbf{T}}S = S$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $S, S' \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$,

$$ {}^{\mathbf{T}}(\lambda S + \mu S') = \lambda {}^{\mathbf{T}}S + \mu {}^{\mathbf{T}}S' = \lambda S + \mu S'. $$

Pour l'antisymétrie, c'est la même chose. La multiplication scalaire et somme de matrices se faisant coordonnée par coordonnée, il est évident également que $T_n^{++}(\mathbf{K})$ a aussi une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
On remarque ensuite que la famille $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et possède $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments. En effet, toute matrice symétrique $S = (s_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ (avec $s_{k,l} = s_{l,k}$) s'écrit sous la forme

$$ S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} s_{k,l}E_{k,l} = \sum_{1\leqslant k+1\leqslant l\leqslant n} s_{k,l}E_{k,l} + \sum_{1\leqslant l\leqslant k\leqslant n} s_{k,l}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l+1}^{n} s_{k,l}\,(E_{l,k}+E_{k,l}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{s_{l,l}}{2}(E_{l,l}+E_{l,l}), $$

en utilisant la symétrie. Cela prouve le caractère générateur. On voit par ailleurs que c'est aussi une famille libre, si on considère une famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ telle que

$$ \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \lambda_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\lambda_{j,i} + \sum_{j=i}^{n}\lambda_{i,j}\right)E_{i,j} = 0, $$

la somme intermédiaire s'obtenant en permutant sommes puis indices, la liberté découle alors de la liberté de $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $M_n(\mathbf{K})$.

4) Si $M \in T_n^{++}(\mathbf{K})$, M est la forme

$$ M = \begin{pmatrix} 0 & \star & \ldots & \star \\ 0 & 0 & \star & \\ & & 0 & \star \\ 0 & \ldots & & 0 \end{pmatrix}, $$

le polynôme caractéristique est alors $(-1)^nX^n$, M est alors quasi-nilpotente. Une base de $T_n^{++}(\mathbf{K})$ est $(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$, elle est de cardinal $1+2+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Clairement génératrice, et libre en tant que sous-famille d'une famille libre.

5) Si $A \in A_n(\mathbf{K})$, pour tout X, ${}^{\mathbf{T}}XAX \in \mathbf{K}$, cette quantité est donc stable par transposition. D'où :

$$ {}^{\mathbf{T}}XAX = {}^{\mathbf{T}}X{}^{\mathbf{T}}AX = -{}^{\mathbf{T}}XAX, $$

et ${}^{\mathbf{T}}XAX = 0$. En particulier si (X,λ) est un couple propre de A, $AX = \lambda X$ et on obtient $\lambda{}^{\mathbf{T}}XX = 0$. Comme X est non nul, $\lambda = 0$. La matrice A est donc quasi-nilpotente.

6) **Cas** $n = 2$**–** D est dans $A_2(\mathbf{R})$. S'il existe $P \in GL_2(\mathbf{R})$ et $M \in T_2^{++}(R)$ telles que $D = PMP^{-1}$, D serait quasi-nilpotente sur $\mathbf{R}$ comme M l'est. L'assertion est donc démontrée dans ce cas.

Cas général– si $n = 2p$ est paire pour un certain $p \in \mathbf{N}$, il suffit de considérer la matrice anti-symétrique suivante formée de p blocs de D :

$$ \begin{pmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0 & D \end{pmatrix}. $$

Un calcul de déterminant par blocs montre que le polynôme caractéristique associé est $(X^2+1)^p$, l'argument du cas $n=2$ s'applique encore une fois. Si $n=2p+1$ est impair on considère la matrice antisymétrique suivante formée de $p-1$ blocs de D et de C :

$$\begin{pmatrix} D & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & D & \dots & & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & D & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

avec $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul de déterminant par blocs prouve que cette matrice n'est pas quasi-nilpotente, 0 n'étant pas valeur propre de C.

2 Cas réel

7) D'après le théorème spectral, toute matrice M de $S_n(\mathbf{R})$ est diagonalisable en base orthonormée à valeurs propres réelles λ_1, ..., λ_n : il donc existe une matrice orthogonale P telle que

$$M={}^{\mathbf{T}}P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P.$$

Si M est quasi-nilpotente, tous les λ_i sont nuls et M est la matrice nulle. Si $M\in\mathscr{S}_n(\mathbf{C})$, la matrice B de la première partie fournit un contre-exemple : elle est non nulle mais symétrique et quasi-nilpotente.

8) Comme $M_n(\mathbf{R})=S_n(\mathbf{R})\oplus A_n(\mathbf{R})$,

$$V=(S_n(\mathbf{R})\cap V)\oplus(A_n(\mathbf{R})\cap V)\ \text{ puis }\ \dim V=\underbrace{\dim(S_n(\mathbf{R})\cap V)}_{=0}+\dim(A_n(\mathbf{R})\cap V)\leqslant\dim(A_n(\mathbf{R}))=\frac{n(n-1)}{2}.$$

3 Lemme des colonnes

9) Soit V un sous-espace vectoriel quasi nilpotent de $M_1(\mathbf{K})$, toute matrice de V est alors diagonalisable avec une unique valeur propre. Comme ces matrices sont quasi-nilpotentes par hypothèse, elles sont nulles et $C_1(V)=\{0\}$.

10) Soit V un espace vectoriel de matrices quasi-nilpotentes. L'espace V' est, par hypothèse absurde, non vide et quasi-nilpotent. Le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M=-X\chi_{K(M)}$$

pour tout $M\in V'$, donc $K(V')$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de matrices de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{K})$.

11) D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un j dans $\{1,\dots,n-1\}$ tel que $C_j(K(V'))=\{0\}$. Mais d'après l'hypothèse absurde, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $C_k(V)\neq\{0\}$. On applique donc ceci pour $k=j$, ce qui donne une matrice M de j-ième colonne non nulle dans V, et même dans V' comme $j\neq n$:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \star & 0 & 0 \\ & & & \star & & \\ \vdots & \dots & & & & \\ 0 & & 0 & \star & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut supposer que le coefficient (n,j) est non nul quitte à permuter. Puis l'hypothèse de récurrence affirme que le bloc K de cette dernière est nul ($K(M)$ est une matrice de $M_{n-1}(\mathbf{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième), finalement il ne reste qu'un coefficient en position (n,j) que l'on peut supposer être égal à 1 puisque V est un espace vectoriel. Conclusion : pour un certain $j\in\{1,\dots,n-1\}$, $E_{n,j}\in V$.

12) u_σ est un endomorphisme de permutation : vérifions que $(u_\sigma)^{-1}=u_{\sigma^{-1}}$. En effet pour tous $j\in\{1,\dots,n\}$:

$$u_{\sigma^{-1}}\circ u_\sigma(e_j)=u_{\sigma^{-1}}\left(e_{\sigma(j)}\right)=e_j=u_\sigma\circ u_{\sigma^{-1}}(e_j).$$

Les deux applications linéaires coïncident sur une base avec l'identité, elles sont donc égales partout.

13) Il suffit de calculer le coefficient (i,j) de u_σ. La colonne j de $\underset{e,e}{\mathrm{Mat}}(u_\sigma)$ est $e_{\sigma(j)} = \sum_{i=1}^n \delta_{i,\sigma(j)} e_i$, d'où le fait que

$$\underset{e,e}{\mathrm{Mat}}(u_\sigma) = P_\sigma.$$

L'inversibilité de u_σ donne celle de P_σ et

$$(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}},$$

d'après ce qui a été fait *supra*.

14) Pour tous $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$:

$$\left(P_\sigma^{-1} M P_\sigma\right)_{i,j} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left(P_\sigma^{-1}\right)_{i,l} M_{l,k} \left(P_\sigma\right)_{k,j} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma^{-1}(l)} M_{l,k} \delta_{k,\sigma(j)} = M_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

15) On note $V^\sigma = \left\{P_\sigma^{-1} M P_\sigma : M \in V\right\}$. Le polynôme caractéristique est invariant par conjuguaison, pour tous $M \in V$:

$$\chi_{P_\sigma^{-1} M P_\sigma} = \chi_M.$$

Le fait que V soit un sous-espace quasi-nilpotent se transmet donc immédiatement à V^σ. Ensuite pour tous j, on souhaite construire une matrice de V^σ non nulle telle que toutes les colonnes soient nulles exceptée la j-ième. Par hypothèse on sait que c'est le cas pour V, on note M_j une telle matrice pour chaque j, alors

$$\left(P_\sigma^{-1} M_j P_\sigma\right)_{k,l} = \left(M_j\right)_{\sigma(k),\sigma(l)},$$

cette dernière matrice a toutes ces colonnes nulles exceptée la $\sigma^{-1}(j)$-ième. Comme σ est bijective, pour tout $j \in \{1,...,n\}, C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$.

16) Ce que l'on veut faire est quasiment la question **11)** à permutation près. Soit $j \in \{1,...,n\}$, notons $\sigma_j = (j \quad n)$, la bijection qui envoie j sur n et fixe les autres entiers. Comme V^{σ_j} est un sous-espace vectoriel quasi nilpotent de $M_n(\mathbf{K})$, il existe d'après **11)** un entier $g(j) \in \{1,...,n-1\}$ tel que

$$E_{n,g(j)} \in V^{\sigma_j}.$$

Mais alors

$$P_{\sigma_j} E_{n,g(j)} P_{\sigma_j}^{-1} = \left(\delta_{\sigma_j(k),n} \delta_{\sigma_j(l),f(j)}\right)_{k,l} = E_{\sigma_j^{-1}(n),\sigma_j^{-1}(g(j))} = E_{j,f(j)} \in V,$$

en posant $f(j) = \sigma_j^{-1}(g(j))$ et $f(j) \neq j$ car sinon $n = g(j)$.

17) On considère la suite $\left(f^k(1)\right)_{k\in\mathbf{N}}$. Nécessairement il existe deux entiers $p > q$ tels que $f^p(1) = f^q(1)$. En effet, dans le cas contraire tous les $f^k(1)$ pour tout $k \geqslant 1$ seraient différents, dans un ensemble fini $\{1,...,n\}$, ce qui est absurde. On définit alors la suite j :

$$j_1 = f^q(1), \quad j_2 = f(j_1) = f^{q+1}(1), \quad \dots \quad j_{p-q+1} = f(j_{p-q}) = f^p(1) = j_1.$$

Dans la suite, on reprend la notation p pour la longueur de la suite plutôt que $p-q+1$.

18) Un algorithme serait le suivant :

```
L=[] ;
L : liste ;
k=f(1) ;
Tant que (f(k) ∉ L) faire
    L← L+[k] ;
    k ←f(k) ;
Fait
l=0 ;m=taille(L) ;
Tant que (L[l] ≠ L[m-1]) faire
    l=l+1
Fait
Retourner L[l :m-1], liste L dont on a supprimé le début
```

Algorithme 1: création de la liste des j_i

19) Notons $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$. $N \in V$ via la structure d'espace vectoriel de V. Montrons que 1 est valeur propre, dans ce cas l'hypothèse faite au départ sera clairement absurde puisque V est supposé être un espace quasi-nilpotent. Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, alors la i-ème coordonnée de NX est

$$(NX)_i = \sum_{k=1}^{p} \delta_{i,j_k} x_{f(j_k)}.$$

On voudrait trouver un X tel que pour tout i

$$\sum_{k=1}^{p} \delta_{i,j_k} x_{f(j_k)} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{i,j_k} x_{j_{k+1}} = x_i.$$

On pose donc $x_i = 0$ sur les i tels que $i \notin \{j_1, ..., j_p\}$, et 1 ailleurs.

4 CAS GÉNÉRAL

20) Commençons par supposer que $C_n(V) = \{0\}$: on suppose donc que l'entier j obtenu par le lemme des colonnes est n. On verra plus tard que cela n'est pas restrictif. L'hypothèse est exactement équivalente à

$$\operatorname{Ker} K \cap W = \{0\}.$$

Donc en particulier

$$\dim(\operatorname{Ker} K \cap W) = \dim \operatorname{Ker}(K_{|W}) = 0.$$

La formule du rang à $K_{|W}$ donne donc :

$$\operatorname{Rg}(K_{|W}) + \dim \operatorname{Ker}(K_{|W}) = \dim K(W) + \dim(\operatorname{Ker}(K) \cap W) = \dim K(W) = \dim W.$$

La question est donc équivalente à

$$\dim V \leqslant \dim W + (n-1),$$

et cette dernière inégalité découle de la formule du rang appliquée à L :

$$\operatorname{Rg} L + \dim W = \dim V, \text{ et } \operatorname{Rg} L \leqslant n-1.$$

21) $K(W)$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n-1}(\mathbf{K})$, il est de plus quasi-nilpotent (puisque si $M \in W$, $L(M) = 0$ et un calcul de déterminant par blocs donne $a(M) = 0$ et $K(M)$ quasi nilpotente) et l'hypothèse de récurrence affirme que

$$\dim K(W) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

En injectant dans la question précédente, on obtient la borne voulue.

22) Pour finir, on peut facilement se ramener au cas précédent. En effet, d'après le lemme des colonnes il existe un j tel que $C_j(V) = \{0\}$. Or $\dim V^\sigma = \dim V$ pour toute permutation σ, en particulier si $\sigma = (j \quad n)$, on a $C_n(V^\sigma) = \{0\}$ et le cas précédent s'applique.