Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve A – 2022

Première Partie

1. La matrice A est à coefficients réels et vérifie ${}^tA = A$. Ainsi, A est une matrice symétrique, réelle. Donc, $\boxed{\text{A est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthonormée.}}$
2. Notons $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme caractéristique de A. On a :

$$\det(XI-A) = \begin{vmatrix} X-5/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1/2 & -1 & X-5/2 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1/2 \\ X-4 & X-2 & -1 \\ X-4 & -1 & X-5/2 \end{vmatrix}$$
$$= (X-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-5/2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} (X-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & X-1 & -1/2 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

On en déduit : $\chi_A(X) = (X-4)(X-1)(X-2)$. Donc, $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont 1, 2 et 4.}}$

Remarque : le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ et à racines simples ; ce qui prouve à nouveau que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. Notons $E_1 = \mathrm{Ker}(I-A)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(2I-A)$ et $E_4 = \mathrm{Ker}(4I-A)$

- Déterminons l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. On a : $I - A = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1/2 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-2y-z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -x-2y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-2(-x-z)-z=0 \\ y=-x-z \\ -x-2(-x-z)-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ y=-x-z \\ x-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x\in\mathbb{R}. \text{ On en déduit :}$$

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}\right) \text{ avec } \gamma = \tfrac{1}{\sqrt{6}} = \tfrac{\sqrt{6}}{6} \text{ et } \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}.$$

- Déterminons l'espace propre E_2 associé à la valeur propre 2. On a : $2I - A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y-z=0 \\ -x-z=0 \\ -x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=0 \\ x=-z \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } x\in\mathbb{R}. \text{ On en déduit :}$$

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}\right) \text{ avec } \alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

- Déterminons l'espace propre E_4 associé à la valeur propre 4. On a : $4I - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-(x+z)-z=0 \\ 2y=x+z \\ -x-(x+z)+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x\in\mathbb{R}. \text{ On en déduit :}$$

$$E_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}\right) \text{ avec } \beta = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

On en déduit, avec les contraintes de l'énoncé :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ -2\gamma & 0 & \beta \\ \gamma & -\alpha & \beta \end{pmatrix} \text{ où } \alpha = \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \beta = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \gamma = \tfrac{\sqrt{6}}{6}.}$$

De plus, on a bien : ${}^tPP = I$: P est bien une matrice orthogonale.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$, notons H_n : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
   - Initialisation. pour $n=0$, on a : $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$.
   - Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. On a : $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$ d'où : $A^{n+1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.

   Nous avons montré par récurrence que : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, A^n = PD^nP^{-1}.}$

5. D'après 3, P est une matrice orthogonale, donc elle vérifie : $P^{-1} = {}^tP$; et D est une matrice diagonale, donc elle vérifie : $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$. D'après 4, on en déduit :

$$A^n = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ -2\gamma & 0 & \beta \\ \gamma & -\alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -2\gamma & \gamma \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma & \alpha 2^n & \beta 4^n \\ -2\gamma & 0 & \beta 4^n \\ \gamma & -\alpha 2^n & \beta 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -2\gamma & \gamma \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix}.$$

où $\gamma^2 + \alpha^2\cdot 2^n + \beta^2\cdot 4^n = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2^n}{2} + \dfrac{4^n}{3} = \dfrac{1+3\cdot 2^n + 2\cdot 4^n}{6} = \dfrac{1+3\cdot 2^n + 2^{2n+1}}{6}$

$$-2\gamma^2 + \beta^2\cdot 4^n = \frac{-2}{6} + \frac{4^n}{3} = \frac{-1+4^n}{3} = \frac{-1+2^{2n}}{3}$$
$$\gamma^2 - \alpha^2\cdot 2^n + \beta^2\cdot 4^n = \frac{1-3\cdot 2^n + 2^{2n+1}}{6}$$
$$4\gamma^2 + \beta^2\cdot 4^n = \frac{4}{6} + \frac{4^n}{3} = \frac{2+2^{2n}}{3} = \frac{4+2^{2n+1}}{6}$$

On en déduit :

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3.2^n+2^{2n+1} & -2+2^{2n+1} & 1-3.2^n+2^{2n+1} \\ -2+2^{2n+1} & 4+2^{2n+1} & -2+2^{2n+1} \\ 1-3.2^n+2^{2n+1} & -2+2^{2n+1} & 1+3.2^n+2^{2n+1} \end{pmatrix}$$

6. Avec D' une matrice diagonale et P' une matrice orthogonale, on a :

$${}^tA' = {}^t\left(P'D'P'^{-1}\right) = {}^t\left(P'^{-1}\right){}^tD'{}^tP' = {}^t\left({}^tP'\right)D'P'^{-1};\ \text{car } P'^{-1} = {}^tP' \text{ et } {}^tD' = D'.$$

D'où : ${}^tA' = P'D'P'^{-1} = A'$.

Finalement, si D' une matrice diagonale et P' une matrice orthogonale, $A' = P'D'P'^{-1}$ est bien une matrice symétrique.

Deuxième Partie

1. (a) Soit $(u,v,w) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3, \lambda\in\mathbb{R}$. On a :
   - V est une matrice colonne, AV l'est également, et ${}^tU$ est une matrice ligne. Or, le produit d'une matrice ligne à gauche par une matrice colonne à droite renvoie une matrice à un seul coefficient donc φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, que l'on confond avec $\mathbb{R}$, d'après l'énoncé.
   - $\varphi(v,u) = {}^tVAU = {}^t\left({}^tVAU\right)$ car ${}^tVAU \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

     $= {}^tU{}^tA{}^t\left({}^tV\right) = {}^tUAV = \varphi(u,v)$ car A est symétrique.

     donc φ est symétrique.
   - $\varphi(u, v+\lambda w) = {}^tUA(V+\lambda W) = {}^tUAV + \lambda{}^tUAW$ car $\lambda\in\mathbb{R}$

     $= \varphi(u,v) + \lambda\varphi(u,w)$.

     donc, avec le point précédent, φ est bilinéaire.

   Ainsi, par ces trois points, $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique.}}$

(b) On a : $U' = {}^tPU = P^{-1}U$ car P est une matrice orthogonale. On obtient : $U = PU'$. On en déduit que : $\boxed{U' \text{ est le vecteur colonne des coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{B}', \text{ dont la matrice associée dans la base canonique est } P, \text{ c'est-à-dire dans la base } \mathcal{B}' = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}(i-2j+k), \frac{\sqrt{2}}{2}(i-k), \frac{\sqrt{3}}{3}(i+j+k)\right)}$

(c) On a
$$\begin{aligned}\varphi(u,u) &= {}^tUAU = {}^tUPDP^{-1}U && \text{d'après I.3.}\\ &= {}^tU^t\left({}^tP\right)D^tPU && \text{car } P \text{ est une matrice orthogonale}\\ &= {}^t\left({}^tPU\right)D^tPU = {}^tU'DU' = \varphi(u,u).\end{aligned}$$
Avec $U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a : $\varphi(u,u) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ 2y' \\ 4z' \end{pmatrix}$

On en déduit : $\boxed{\varphi(u,u) = x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2.}$

(d) On déduit de II.1.(c), que : $\varphi(u,u) \geq 0$ $(*)$. Et, on a :
$\varphi(u,u) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 0 \Leftrightarrow x' = y' = z' = 0 \Leftrightarrow U' = 0 \Leftrightarrow P^{-1}U = 0$
$\Leftrightarrow U = 0 \Leftrightarrow u = 0$ $(**)$.
D'après II.1.(a), φ est une forme bilinéaire symétrique ; et d'après $(*)$ et $(**)$, φ est définie positive.
Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^3.}$

2. (a) Soit u et v deux vecteurs propres de f. Notons λ et μ leurs valeurs propres associées ; on a :
$$f(u) = \lambda u, f(v) = \mu v, u \neq 0 \text{ et } v \neq 0.$$
De plus, on a : $AU = \lambda U$ et $AV = \mu V$, car f est l'endomorphisme canoniquement associé à A. On en déduit :
$$\varphi(u,v) = {}^tUAV = {}^tU\mu V = \mu^tUV \text{ et } \varphi(v,u) = {}^tVAU = {}^tV\lambda U = \lambda^tVU.$$
Or, ${}^tUV \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, donc on a : ${}^t\left({}^tUV\right) = {}^tUV \Leftrightarrow {}^tV^t\left({}^tU\right) = {}^tUV \Leftrightarrow {}^tVU = {}^tUV(\therefore)$
Ainsi, on a : $\varphi(u,v) = \varphi(v,u) \Leftrightarrow \mu^tUV = \lambda^tVU \Leftrightarrow \mu^tUV = \lambda^tUV$ d'après $(\therefore)$
$\Leftrightarrow (\mu-\lambda)^tUV = 0 \Leftrightarrow {}^tUV = 0$ car $\mu - \lambda \neq 0$.
Or, $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ est vrai d'après II.1.(a), donc : ${}^tUV = 0$ et $\varphi(u,v) = \mu^tUV = 0$.
Ainsi, on montre bien que :
$\boxed{\text{deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour } \varphi.}$

(b) La base $\mathcal{B}'$ décrite en II.1.(a) est une base de vecteurs propres de f associés à trois valeurs propres distinctes de f, d'après I.3. Donc, ces trois vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux pour φ. De plus, on a :

- Pour $u = \frac{\sqrt{6}}{6}(i-2j+k)$: $U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc : $\varphi(u,u) = 1^2 + 2.0^2 + 4.0^2 = 1$.
- Pour $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-k)$: $V' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc : $\varphi(v,v) = 0^2 + 2.1^2 + 4.0^2 = 2$.
  Posons $v' = \frac{1}{\sqrt{2}}v = \frac{1}{2}(i-k)$, qui vérifie : $\varphi(v',v') = \frac{2}{2} = 1$.
- Pour $w = \frac{\sqrt{3}}{3}(i+j+k)$: $W' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc : $\varphi(w,w) = 0^2 + 2.0^2 + 4.1^2 = 4$.
  Posons $w' = \frac{1}{2}w = \frac{\sqrt{3}}{6}(i+j+k)$, qui vérifie : $\varphi(w',w') = \frac{4}{4} = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la base } \mathcal{B}'' = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}(i-2j+k), \frac{1}{2}(i-k), \frac{\sqrt{3}}{6}(i+j+k)\right) \text{ est une base orthonormée pour } \varphi.}$

3. On a $F_u = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v,u\rangle = {}^tVU = 0\right\}$ et $F'_u = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v,u) = {}^tVAU = 0\right\}$.
Soit u un vecteur propre de f associé à λ, on a : $f(u) = \lambda u$ et $AU = \lambda U$. On en déduit :
$$\begin{aligned} v \in F'_u &\Leftrightarrow \varphi(v,u) = 0 \Leftrightarrow {}^tVAU = 0 \Leftrightarrow {}^tV\lambda U = 0 \Leftrightarrow {}^tVU = 0\\ &\Leftrightarrow {}^tVU = 0 \Leftrightarrow \langle v,u\rangle = 0 \Leftrightarrow v \in F_u \text{ avec } \lambda \neq 0, \qquad \text{car} \lambda \in \{1,2,4\} \text{ d'après I.2.}\end{aligned}$$
Ainsi, on a bien : $\boxed{F_u = F'_u.}$

4. (a) La base $\mathcal{B} = (i,j,k)$ est orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$. Donc $\boxed{F_i = \mathrm{Vect}(j,k) \text{ et } (j,k) \text{ est une base de } F_i.}$

(b) Soit $v \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$\begin{aligned} v \in F_i &\Leftrightarrow \varphi(v,i) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{2} + y + \frac{z}{2} = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y + z = 0\end{aligned}$$
Donc $\boxed{F'_i \text{ est le plan de vecteur normal } n = 5i + 2j + k.}$
Choisissons deux vecteurs orthogonaux à n pour $\langle\,,\rangle$ et non colinéaires entre eux : par exemple $a = i - 5k$ et $b = j - 2k$. Alors $\boxed{(i-5k, j-2k) \text{ est une base de } F'_i.}$

(c) $\boxed{\text{Non, on n'a pas } F_i = F'_i}$, car par exemple, $i - 5k \in F'_i$ et $i - 5k \notin \mathrm{Vect}(j,k)$; donc $i - 5k \notin F_i$.
Ainsi, F_i est le plan d'équation $x = 0$ et F'_i est le plan d'équation $5x + 2y + z = 0$. Donc, on a :
$$xi + yj + zk \in F_i \cap F'_i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, on trouve : $\boxed{F_i \cap F'_i = \mathrm{Vect}(0i + j - 2k) \text{ et } \{j - 2k\} \text{ est une base de } F_i \cap F'_i.}$

5. (a) Soit $v \in \mathbb{R}^3$, on a : $v \in F'_u \Leftrightarrow \varphi(u,v) = 0 \Leftrightarrow {}^tUAV = 0 \Leftrightarrow \langle u, f(v)\rangle = 0 \Leftrightarrow f(v) \in F_u$
On montre ainsi que : $\boxed{v \in F'_u \Rightarrow f(v) \in F_u.}$

(b) Soit $(v,w) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$, on a :
$$\begin{aligned}\langle f(v), w\rangle = \langle w, f(v)\rangle = {}^tWAV &= {}^t\left({}^tWAV\right) && \text{car } {}^tWAV \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})\\ &= {}^tV^tA^t\left({}^tW\right) = {}^tVAW && \text{car } A \text{ est symétrique.}\end{aligned}$$
On en déduit : $\boxed{\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle.}$

6. (a) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $F_u = F'_u$.
On a, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$: $\langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi(u,v) = 0 \Leftrightarrow \langle u, f(v)\rangle = 0$ d'après II.5.(a).
- Montrons que $f(F_u) \subset F_u$.
  Soit $w \in f(F_u)$, alors w est de la forme $w = f(v)$ avec $v \in F_u$.
  On en déduit : $\langle w,u\rangle = \langle f(v),u\rangle = 0$ car $v \in F_u$ et $\langle u,v\rangle = 0$.
  Donc $w \in F_u$ et on a montré que : $f(F_u) \subset F_u$.
- De plus, $f(F_u)$ et F_u sont deux sous espaces vectoriels de même dimension, car f est un endomorphisme bijectif (en effet $0 \notin Sp(f)$ d'après I.2, et $\det(f) \neq 0$).

Ainsi, on a bien : $\boxed{f(F_u) = F_u.}$

(b) Soit $v \in F_u$, on a : $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle = 0$ d'après I. 5.(a) et II.6.(a) avec $f(v) \in f(F_u)$.
Donc, $f(u)$ est orthogonal à F_u pour $\langle\,,\rangle$.
Or, on a : $F_u = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$; donc $f(u) \in F_u^{\perp}$, avec $F_u^{\perp} = \mathrm{Vect}(u)$.
On en déduit que $f(u)$ est de la forme $f(u) = \lambda u$ avec $u \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Donc, $\boxed{u \text{ est un vecteur propre de } f.}$

Troisième Partie

1. (a) On a, par définition, $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$. Avec la modélisation, $P(X=1) = P(C_1) = \frac{1}{3}$ et
$$P(X=2) = P(\overline{C_1} \cap C_2) = P(C_2 \mid \overline{C_1})P(\overline{C_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
puis $P(X=3) = 1 - P(X=1) - P(X=2) = \frac{1}{3}$.
$\boxed{\text{Finalement, } X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1,3]\!].}$

(b) On a : $\boxed{E(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = 2}$ et $\boxed{V(X) = \frac{1}{3}(1-2)^2 + \frac{1}{3}(2-2)^2 + \frac{1}{3}(3-2)^2 = \frac{2}{3}}$.

2. (a) J suit la loi de répétition de l'expérience « jouer un trou » 36 fois, de façon indépendante dont la probabilité de succès est de prendre une des 4 balles jaunes sur 48 : $\frac{4}{48}=\frac{1}{12}$. Ainsi, J suit une loi binomiale de paramètres 36 et 1/12. On a : $J(\Omega)=[\![0,36]\!]$ et, pour $k\in[\![0,36]\!]$,

$$P(J=k)=\binom{k}{36}\frac{1}{12^k}\left(\frac{11}{12}\right)^{36-k}=\binom{k}{36}\frac{11^{36-k}}{12^{36}}.$$

(b) Anna a joué en moyenne $E(X)=36/12=3$ balles jaunes sur les deux parcours.

3. (a) On a $E(J')=\lambda$ donc $E(J')=E(J')$ si et seulement si $\boxed{\lambda=3}$.

(b) Par définition d'une loi de Poisson :

$$P(J'=9)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^9}{9!}=e^{-3}\frac{3^9}{9!}\quad\text{et}\quad P(J\geqslant 1)=1-P(J=0)=1-e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=1-e^{-3}.$$

(c) Les événements successifs donnés par l'énoncé sont $(J\leqslant 3)$, $(J=7)$ et $(J\geqslant 10)$. On a les approximations successives :

$$P(J\leqslant 3)\approx P(J'\leqslant 3)=F(3)\approx 0,6472$$

et de façon analogue $P(J=7)\approx F(7)-F(6)\approx 0,0216$ et $P(J\geqslant 10\approx 1-F(9)\approx 0,0011$. Les valeurs approchées des probabilités des événements sont donc respectivement : $\boxed{0,6472,\ 0,0216 \text{ et } 0,0011}$.

4. (a) On a, en utilisant le point 2 de l'énoncé, puisque (A_0,B_0,C_0) forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales

$$a_1=P(A_1)=P(A_1\cap A_0)+P(A_1\cap B_0)+P(A_1\cap C_0)=P(A_1\cap B_0)=P_{B_0}(A_1)P(B_0)=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$$

puis $A_0=C_0=\emptyset$. On procédant de même pour b_1 et c_1, on obtient $\boxed{a_1=\frac{1}{4},\ b_1=\frac{1}{2}\text{ et } c_1=\frac{1}{4}}$.

(b) La probabilité $P_{A_n}(A_{n+1})$ correspond exactement à la probabilité pour Anthony d'être sous le par à l'entraînement $n+1$ sachant qu'il est sous le par à l'entraînement n. Ceci correspond donc à la première probabilité du premier • de l'énoncé : $P_{A_n}(A_{n+1})=\frac{5}{8}$. En utilisant des probabilités des autres • de l'énoncé, on a :

$$P_n(A_{n+1})=\frac{1}{4}\quad\text{et}\quad P_{C_n}(A_{n+1})=\frac{1}{8}.$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$. Par définition : (A_n,B_n,C_n) forme un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales pour obtenir :

$$\begin{aligned}P(A_{n+1})=&P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n)+P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n)+P_{Cn}(A_{n+1})P(C_n)\\=&\frac{5}{8}a_n+\frac{1}{4}bn+\frac{1}{8}c_n\end{aligned}$$

avec la question précédente. Finalement $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ que } a_{n+1}=\frac{5}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{8}c_n}$.

(d) Soit $n\in\mathbb{N}$. De façon analogue :

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}c_n\quad\text{et}\quad c_{n+1}=\frac{1}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{5}{8}c_n.$$

(e) On a, avec les relations précédentes, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$G_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{5}{8}\end{pmatrix}(a_nb_nc_n)$$

ce qui s'écrit $\boxed{G_{n+1}=AG_n}$.

(f) On peut par exemple utiliser le code suivant :

```
import numpy as np

def G(n):
    X = np.array([[0],[1],[0]])
    #on definit B = 1/4 * A
    B = np.array([[5/8,1/4,1/8],[1/4,1/2,1/4],[1/8,1/4,5/8]])
    for k in range(n):
        X = np.dot(B,X)
    return(X)

print(G(20)[1])
```

(g) On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\boxed{G_n=\frac{1}{4^n}A^nG_0}$.

(h) On obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$, avec la Première Partie :

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4^n}A^n\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4^n}\times\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2^{2n+1}-2\\2^{2n+1}+4\\2^{2n+1}-2\end{pmatrix}$$

qui donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl}a_n=c_n&=&\frac{1}{3}-\frac{2}{6\times 4^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times 4^n}\\b_n&=&\frac{1}{3}+\frac{4}{6\times 4^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\times 4^n}\end{array}\right..$$

(i) Comme $\frac{1}{4^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, par opération :

$$a_n,b_n,c_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3}.$$

Lorsque n est grand, Anthony a autant de chances d'être sous, sur ou au par. Cela peut poser la question de l'intérêt de l'entraînement.

5. (a) Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, on a :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

donc on peut prendre $\boxed{a=1 \text{ et } b=-1}$ avec les notations de l'énoncé.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a, par définition :

$$(T=n)=\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{n-1}}\cap S_n=S_n\cap\bigcap_{k=1}^{n-1}\overline{S_k}$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Avec la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned}P(T=n)&=P(\overline{S_1})\times P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2})\times\cdots\cap P_{\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{n-2}}}(\overline{S_{n-1}})\times P_{\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\cdots\cap\overline{S_{n-1}}}(S_n)\\&=(1-p_1)\times(1-p_2)\times\cdots\times(1-p_{n-1})\times p_n\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

donc $\boxed{P(T=n)=\frac{1}{n(n+1)}}$. On a également $P(T=1)=p_1=\frac{1}{1\times 2}$ donc la formule précédente est vraie pour $n=1$.

(d) La première tentative à lieu à 00h00, la deuxième à 00h03 puis, en continuant le raisonnement, la vingtième tentative a lieu à 00h57. En une heure, Anthony a effectué 21 tentatives. La probabilité demandée ici est donc $P(1\leqslant T\leqslant 21)$ qui se calcule avec les deux questions précédentes :

$$P(1\leqslant T\leqslant 21)=\sum_{k=1}^{21}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{21}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{22}$$

par télescopage donc la probabilité de sortir la balle en une heure ou moins est de $P(1\leqslant T\leqslant 21)=\frac{21}{22}$.

(e) Par définition, $\sum P(T=n)$ est convergente et sa somme vaut 1 donc, à nouveau par télescopage,

$$P(T=0)=1-P(T\geqslant 1)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\left(1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\right)=1-1.$$

Finalement, $\boxed{P(T=0)=0}$.

(f) i. Par définition, G_T est la fonction somme de la série entière $\sum P(T=n)z^n$. Déterminons le rayon de convergence R de cette série entière. Soit z un complexe non nul. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |P(T=n)z^n|$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2}|z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

Ainsi, par le critère de d'Alembert, si $|z|<1$ alors $\sum u_n$ converge donc $R \geqslant 1$ et, si $|z|>1$ alors $\sum u_n$ converge donc $R \leqslant 1$. Ainsi, $\boxed{R=1}$. On a donc, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$G_T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

ii. Soit $x \in]-1,1[$. On a $G_T(0)=0$. En utilisant le développement en série entière usuel de $x \mapsto \ln(1-x)$ (dont le rayon est 1) et la décomposition en éléments simples précédente, on obtient, puisque tous les termes des égalités suivantes sont convergents, lorsque $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} G_T(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x\right) \quad = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) \end{aligned}$$

donc

$$G_T(x) = \begin{cases} 1 + \frac{(1-x)}{x}\ln(1-x) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(g) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si $\sum nP(T=n)$ converge. Or $\sum nP(T=n)$ est la série $\sum \frac{1}{n+1}$ qui est divergente (série harmonique). En conclusion, $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance}}$.