

Exercice n° 1

$$1^\circ) P_f(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ -12 & -4 & -9-X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} = -(X+1) \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} -(X+1) \begin{vmatrix} 5-X & -2 & 4 \\ 12 & -5-X & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(X+1)((X-5)(X+5)+24) = -(X+1)(X^2-1).$$

$$P_g(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -2 \\ 0 & -3-X & -2 \\ 0 & 4 & 3-X \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X+3 & 2 \\ 4 & 3-X \end{vmatrix} = (X+1)(-X^2+9-8) = -(X+1)(X^2-1).$$

Les polynômes caractéristiques de f et g sont tous deux égaux à $-(X-1)(X+1)^2$; Les valeurs propres de f et g sont 1 (simple) et -1 (double).

2°) On désigne par F_λ (resp. G_λ) le sous-espace propre de l'endomorphisme f (resp. g) correspondant à la valeur propre λ .

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ -12 & -4 & -8 \end{pmatrix} \text{ est de rang 1; } A - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \\ -12 & -4 & -10 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2;}$$

$$B + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ est de rang 1; } B - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2;}$$

Les colonnes de $A + I_3$ (respectivement $B + I_3$) vérifient $C_1 = 3C_2$ et $2C_2 = C_3$ (respectivement $C_1 = 0$ et $C_2 = C_3$) donc $F_{-1} = \text{Vect}((1, -3, 0), (0, 2, -1))$ et $G_{-1} = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$.

Les colonnes de $A - I_3$ (respectivement $B - I_3$) vérifient $C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0$ (respectivement $C_1 + C_2 - 2C_3 = 0$) donc $F_1 = \text{Vect}(1, 2, 2)$ et $G_1 = \text{Vect}(1, 1, -2)$

L'équation du plan $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\det(\vec{u}, \vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{k}) = 0$.

On trouve qu'une équation de F_{-1} est $3x + y + 2z = 0$, et qu'une équation de G_{-1} est $y + z = 0$; Des équations de F_1 (respectivement G_1) sont $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ (resp. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$)

3°) $F_{-1} \cap G_{-1}$ est une droite d'équations $\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, dirigée par $(1, 3, -3)$; De plus, $F_1 \subset G_{-1}$ et $G_1 \subset F_{-1}$.

Donc $((1, 1, -2), (1, 3, -3), (1, 2, -2)) \in F_{-1} \times F_{-1} \times F_1 \cup G_1 \times G_{-1} \times G_{-1}$ est une base formée de vecteurs propres communs à f et g .

$$4^\circ) \text{ On prend } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \text{ l'inverse de } P \text{ trouvé par la méthode de Gauß est } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2

1°) Montrons par récurrence double que $H_n : (a_n \leq n^2 \text{ pour } n \geq 1)$

C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$:

Si H_n et H_{n-1} sont vrais, alors $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leq \frac{2}{n+1}(n-1)^2$; or $\frac{2}{n+1}(n-1)^2 - (2n+1) = \frac{1}{n+1}(2n^2 - 4n + 2 - (2n+1)(n+1)) = \frac{1-7n}{n+1} \leq n$ pour $n \geq 1$.

Donc $a_{n+1} - a_n \leq 2n+1$, et $a_{n+1} \leq n^2 + (2n+1) \leq (n+1)^2$ ce qui établit H_{n+1} , et donc H_n est vraie pour tout $n \geq 1$ par récurrence double.

Puisque $a_n \geq 1$, $|z| > 1 \Rightarrow \sum |z|^n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n |z|^n$ diverge et donc $R \leq 1$.

Puisque $a_n \leq 1$, $|z| < 1 \Rightarrow \sum n^2 |z|^n$ converge $\Rightarrow \sum a_n |z|^n$ converge et donc $R \geq 1$.

Finalement $\boxed{R = 1}$.

2°) $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$ et donc $a_{n+1}x^{n+1} - a_nx^{n+1} = \frac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}a_{n-1}x^{n+1}$. Or $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = S(x) - x$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{n+1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = x \cdot S(x)$ et $\frac{d}{dx} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 2x(1 + S(x))$ donc $\frac{d}{dx}((1-x)S(x) - x) = 2x(1 + S(x))$, soit $(1-x)S'(x) - S(x) - 1 = 2x(1 + S(x))$ c'est-à-dire $\boxed{(E) : (1-x)S'(x) - (1+2x)S(x) = (1+2x)}$

3°) -1 est clairement solution de l'équation complète ; Résolvons l'équation sans second membre : $(E_0) : (1-x)S'(x) = (2x+1)S(x)$ sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

$\frac{y'}{y} = (\ln |y|)' = \frac{2x+1}{1-x} = -2 + \frac{3}{1-x}$ donne $\ln |y| = -2x - 3 \ln(1-x) + cte$, donc $y(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ est une solution de (E_0) .

Les solutions de (E) sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont $x \mapsto -1 + \lambda \cdot \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Avec $\lambda = 1$, on obtient $y(0) = 0$ sur $] -\infty, 1[$, soit par unicité de la solution du problème de Cauchy :

$$\boxed{S(x) = -1 + \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \text{ sur }]-1, 1[.}$$

4°) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} = +\infty$, donc Pour que $x \mapsto -1 + \lambda \cdot \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, il faut que $\lambda = 0$. La seule solution de (E) définie en 1 est la constante -1.

Exercice n° 3

1°) Puisque $y(t)^2 = t^2 = 2p \cdot \frac{t^2}{2p} = 2p \cdot x(t)$, $\mathcal{P}$ vérifie l'équation cartésienne $y^2 = 2p \cdot x$; C'est une parabole d'axe O_x , et de coefficient p .

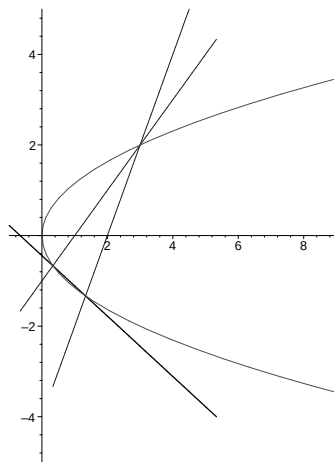


figure 1

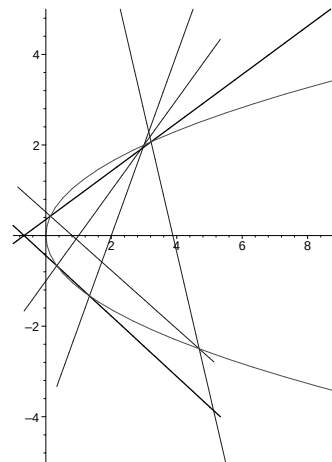


figure 2

2°) $\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{t}{p}\vec{i} + \vec{j}$ est orthogonal à la normale ; Appelons cette normale $\mathcal{N}(t)$.

$$N : (X, Y) \in \mathcal{N}(t) \text{ ssi } \overrightarrow{ON} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \overrightarrow{OM}(t) \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}, \text{ donc ssi } \boxed{\frac{t}{p}X + Y = \frac{t}{p}\frac{t^2}{2p} + t = t + \frac{t^3}{2p^3}}.$$

3°) $M(\theta) \in \mathcal{N}(t)$ ssi $\frac{t}{p}\frac{\theta^2}{2p} + \theta = t + \frac{t^3}{2p^3}$, c'est-à-dire $\frac{t}{2p^2}(\theta^2 - t^2) + (\theta - t) = 0$, donc $\frac{\theta - t}{2p^2}(t(t + \theta) + 2p^2) = 0$, ce qui se ramène à $t^2 + t\theta + 2p^2 = 0$, puisque $t \neq \theta$.

Le nombre de points répondant aux conditions de l'énoncé correspond aux nombres de racines de ce trinôme de

$$\text{déterminant } \Delta = \theta^2 - 8p^2, \text{ soit } \begin{cases} 2 \text{ points} & \text{si } |\theta| > \sqrt{8}p \\ 1 \text{ point} & \text{si } \theta = \pm\sqrt{8}p \quad (\text{cf. figure 1}) \\ 0 \text{ point} & \text{si } |\theta| < \sqrt{8}p \end{cases}$$

4°) Si $|\theta| > \sqrt{8}p$, soient t_1 et t_2 les deux racines du trinôme $t^2 + t\theta + 2p^2$: $t_1 > t_2$ et $t_1 \cdot t_2 = 2p^2$.

$$\text{La droite } (M(t_1), M(t_2)) \text{ a pour équation : } \begin{vmatrix} X & \frac{t_1^2}{2p} & \frac{t_1^2}{2p} \\ Y & t_1 & t_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ soit, après développement par rapport à la}$$

première colonne : $(2pX)(t_1 - t_2) - Y(t_1^2 - t_2^2) + t_1 t_2 (t_1 - t_2) = 0$, et par simplification par $t_1 - t_2$: $2pX - (t_1 + t_2)Y + 2p^2 = 0$ (car $t_1 \cdot t_2 = 2p^2$), équation vérifiée par le point de coordonnées $\boxed{(X, Y) = (\frac{-1}{2p}, 0)}$ pour toutes valeurs de t_1 et t_2 . (cf. figure 2)

Exercice n° 4

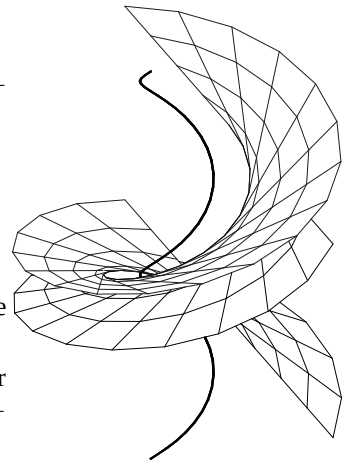
$$\text{Soit } \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ alors } \overrightarrow{OM} = a \cdot \vec{p}(t) +$$

$$u \cdot \vec{v}(t), \text{ donc } \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = a \cdot \vec{p}'(t) + u \cdot \vec{v}'(t) = a \cdot \vec{\alpha}(t) + u \cdot \vec{\alpha}'(t) \text{ et}$$

1°) $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \vec{v}(t)$. La normale à la surface $\mathcal{C}$ en $M(t, u)$ est donc dirigée par

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = -u \vec{v}'(t) \wedge \vec{v}(t) = u(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}), \text{ qui ne s'annule que si } u = 0;$$

$M(t, u)$ est régulier si $u \neq 0$, et alors le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(t, u)$ a pour équation $-\sin t \cdot X + \cos t \cdot Y + Z = -\sin t \cdot (a \cos t - u \sin t) + \cos t \cdot (a \sin t + u \cos t) + at + u$, c'est-à-dire $\boxed{-\sin t \cdot X + \cos t \cdot Y + Z = at}$



$\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ ↗

2°) $\mathcal{S}$ est réglée car engendrée par les droites $(P(t), \vec{v}(t))$ où $\overrightarrow{OP}(t) = a \cdot \vec{p}(t)$.

L'équation du plan tangent en $M(t, u)$ à $\mathcal{S}$ ne dépend pas de u , donc $\mathcal{S}$ est développable.

3°) Soit $N(t)$ le point défini par $\overrightarrow{ON}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + at \vec{k}$; alors $\frac{dN}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + a \vec{k}$.

Le point courant de la tangente à $\mathcal{C}$ en $N(t)$ est $T(t, \lambda) : (-\lambda \sin t + \cos t, \lambda \cos t + \sin t, \lambda a + at)$; $T(t, \frac{u}{a})$ est l'image de $M(t, u)$ par une homothétie de centre O et de rayon $\frac{1}{a}$.

$\mathcal{S}$ n'est pas engendrée par les tangentes à $\mathcal{C}$, sauf si $a = 1$.

4°) $\frac{d\vec{N}}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + a \vec{k}$ et $\frac{d^2 \vec{N}}{dt^2} = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$, donc l'équation du plan osculateur à $\mathcal{C}$ est

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ X - \cos t & \cos t & -\sin t \\ Y - \sin t & \sin t & \cos t \\ Z - at & a & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ c'est-à-dire : } a \sin t X - a \cos t Y + Z = a \sin t \cos t - a \cos t \sin t + at = at;$$

On retrouve l'équation du plan tangent à S en $M(t, u)$.