

**Matrices réelles de partie symétrique positive**

**Partie I**

On note par  $S_n(\mathbb{R})$  l'espace des matrices réelles symétriques d'ordre  $n$  et par  $A_n(\mathbb{R})$  celui des matrices réelle antisymétriques d'ordre  $n$

1. Il s'agit de montrer que  $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$  :  
 Pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on a :  $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$  avec  $\frac{1}{2}(A + {}^tA) \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\frac{1}{2}(A - {}^tA) \in A_n(\mathbb{R})$   
 Si  $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tA = A$  et  ${}^tA = -A$ , donc  $A = -A$  et apr suite  $A = 0$  .

2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , écrivons  $A = A_s + A_a$  où  $A_s \in S_n(\mathbb{R})$  et  $A_a \in A_n(\mathbb{R})$ , et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a alors :  
 $(Ax/x) = (A_sx/x) + (A_ax/x)$  (\*).

Mais pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(A_ax/x) = 0$  en effet :

$$\begin{aligned} (A_ax/x) &= (x/A_a^*x) \quad \text{où } A_a^* \text{ matrice adjointe de } A_a \\ &= (x/{}^tA_ax) \quad \text{car } A_a^* = {}^tA_a \\ &= -(x/A_ax) \quad \text{car } {}^tA_a = -A_a \end{aligned}$$

Et comme le produit scalaire est symétrique, il en résulte que  $(A_ax/x) = 0$  .

Par (\*), on a :  $(Ax/x) = (A_sx/x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  .Donc :

$$\begin{aligned} A \text{ est s-positive} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax/x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, (A_sx/x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{la matrice symétrique réelle } A_s \text{ est positive} \\ &\Leftrightarrow Sp(A_s) \subset \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

**PartieII**

3. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice s-positive et  $\lambda > 0$ , montrons que  $\lambda I + A$  est inversible  
 Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $((\lambda I + A)x/x) = \lambda \|x\|^2 + (Ax/x) \geq 0$  car  $(Ax/x) \geq 0$  et  $\lambda \|x\|^2 \geq 0$  .Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$0 \leq \lambda \|x\|^2 + (Ax/x) = ((\lambda I + A)x/x) \leq \|(\lambda I + A)x\| \|x\| \quad (**)$$

Si  $(\lambda I + A)x = 0$ , on a alors par (\*\*),  $\lambda \|x\|^2 + (Ax/x) = 0$  et par suite  $x = 0$ . L'endomorphisme  $x \mapsto (\lambda I + A)x$  est injectif sur l'espace de dimension finie  $M_n(\mathbb{R})$ , donc  $\lambda I + A$  est inversible.

En concluison : La matrice  $\lambda I + A$  est inversible .

Dans la suite  $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1}$

4. Etude d'exemples :

(a)  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Comme  $A$  est inversible, on a :  $\ker(A) = \{0\}$  et  $\Im(A) = \mathbb{R}^2$  .

Pour  $\lambda > 0$ , on a  $\lambda I + A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ , donc  $R_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda^2+1} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda \end{pmatrix}$  et par suite  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda R_\lambda(A) = 0$  (matrice nulle)

(b)  $n = 3$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a que  $\ker(A) = \text{vect}(e_2)$  et  $\Im(A) = \text{vect}(e_1, e_3)$  où  $B_c = (e_1, e_2, e_3)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $\lambda > 0$ , on a par calcul,  $R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} & 0 & -\frac{1}{\lambda^2+1} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ \frac{1}{\lambda^2+1} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \end{pmatrix}$ , donc  $R_\lambda(A)$  n'a pas de limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

Mais  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dans la suite de cette partie  $A$  est s-positive te  $\lambda > 0$

5. Deux formules utiles

- a. On a  $A(\lambda I + A) = (\lambda I + A)A$  car  $(\lambda I + A)$  est un polynôme en  $A$ , donc  $A = ((\lambda I + A)A((\lambda I + A)^{-1} = (\lambda I + A)AR_\lambda(A)$  et puis  $(\lambda I + A)^{-1}A = AR_\lambda(A)$ . D'où  $R_\lambda(A)A = AR_\lambda(A)$ .

Par  $I = (\lambda I + A)R_\lambda(A) = \lambda R_\lambda(A) + AR_\lambda(A)$ , on a :

$$AR_\lambda(A) = I - \lambda R_\lambda(A)$$

b. Soit  $\mu$  un réel strictement positif, montrons que  $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$ .

Si  $\lambda = \mu$ , la formule est démontrée

Si  $\lambda \neq \mu$ , par  $((\lambda I + A) - (\mu I + A)) = (\lambda - \mu)I$ , en composant à gauche par  $R_\lambda(A)$ , on a :  $I - R_\lambda(A)(\mu I + A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)$  et puis (composer à droite dans cette dernière relation, par  $R_\mu(A)$ ) :

$$R_\mu(A) - R_\lambda(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)$$

6. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x \neq 0$ , posons  $y = R_\lambda(A)x$ , on a :  $y \neq 0$  car  $R_\lambda(A)$  est inversible et  $x = (\lambda I + A)y$ , donc  $\|x\|^2 = \|(\lambda I + A)y\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2 + 2 \underbrace{\langle Ay/y, Ay \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\|Ay\|^2}_{\geq 0} \geq \lambda^2 \|y\|^2$  et puis  $\|x\| \geq \lambda \|y\|$ . D'où  $\frac{\|R_\lambda(A)x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|y\|}{\lambda \|y\|}$ .

En conclusion :

$$\|R_\lambda(A)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|R_\lambda(A)x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Cas d'égalité :

L'application  $x \mapsto \|R_\lambda(A)x\|$  est continue sur le compact  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ , il existe donc  $x_0 \in S$  tel que  $\|R_\lambda(A)\| = \sup_{\|x\|=1} \|R_\lambda(A)x\| = \|R_\lambda(A)x_0\|$ .

posons  $y_0 = R_\lambda(A)x_0$ , on a :

$$\|R_\lambda(A)\| = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \|y_0\| = \frac{1}{\lambda} \text{ et que } 1 = \|x_0\| = \|(\lambda I + A)y_0\| = \lambda^2 \underbrace{\|y_0\|^2}_{=\frac{1}{\lambda^2}} + \underbrace{2\langle Ay_0/y_0, Ay_0 \rangle}_{\geq 0} + \|Ay_0\|^2.$$

Il y'a donc égalité si et seulement si  $2\langle Ay_0/y_0, Ay_0 \rangle + \|Ay_0\|^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \langle Ay_0/y_0, Ay_0 \rangle = 0 \\ \|Ay_0\| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ay_0 = 0 \text{ ( et } y_0 \neq 0 \text{ )}$   
 $\Leftrightarrow \ker(A) \neq \{0\}$   
 $\Leftrightarrow A \text{ non inversible}$   
 $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

7. .

a. Montrons que Si  $x \in \mathfrak{S}(A)$ , alors  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_\lambda(A)x = 0$ .

Soit  $x \in \mathfrak{S}(A)$ , il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x = Ay$ , donc par question 5)  $\lambda R_\lambda(A)x = \lambda R_\lambda(A)Ay = \lambda(I - \lambda R_\lambda(A))y = \lambda y - \lambda^2 R_\lambda(A)y$ .

$$\text{On a que : } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda y = 0 \text{ et } \|\lambda^2 R_\lambda(A)y\| \leq \lambda^2 \|R_\lambda(A)\| \|y\| \leq \lambda^2 \frac{1}{\lambda} \|y\| = \lambda \|y\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

donc  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 R_\lambda(A)y = 0$  et par suite  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda R_\lambda(A)x) = 0$ .

b. On a :  $\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \mathfrak{S}(A)$  en effet : La formule du rang donne :

$$\mathbb{R}^n = \ker(A) + \mathfrak{S}(A).$$

Soit  $x \in \ker(A) \cap \mathfrak{S}(A)$ , alors  $\begin{cases} Ax = 0 \\ x \in \mathfrak{S}(A) \end{cases}$ .

Par la question 5) on a :  $AR_\lambda(A)x = x - \lambda R_\lambda(A)x$  et puisque  $x \in \mathfrak{S}(A)$  (Question 7.a), on a :

$$x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (x - \lambda R_\lambda(A)x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} AR_\lambda(A)x.$$

Or  $AR_\lambda(A)x = R_\lambda(A) \underbrace{Ax}_{=0} = 0$ , car  $x \in \mathfrak{S}(A)$ , donc  $x = 0$ .

(a) Par la question 5.a), pour  $x \in \ker(A)$ , on a :

$$\lambda R_\lambda(A)x = x - AR_\lambda(A)x = x - R_\lambda(A) \underbrace{Ax}_{=0} = x.$$

On sait que si  $x \in \mathfrak{S}(A)$ , alors  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda R_\lambda(A)x = 0$ .

Soit  $B$  un projecteur de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\ker(A)$  parallèlement à  $\mathfrak{S}(A)$ , par ce qui précède on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda R_\lambda(A)x) = Bx \quad (1)$$

Montrons que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda R_\lambda(A) = B$  pour conclure :

Si  $B_c = (e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , par (1), on a :

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ;  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda R_\lambda(A)e_i) = Be_i$  ( $i^{\text{eme}}$  colonne de  $B$ ), donc les composantes dans la base canonique de  $M_n(\mathbb{R})$ , de  $\lambda R_\lambda(A)$  tendent lorsque  $\lambda$  tend vers 0 vers les composantes de  $B$ . D'où  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda R_\lambda(A)) = B$  ( on travaille dans un espace de dimension finie )

8. Caractère  $C^\infty$  de  $\Phi$  :

Pour  $\lambda > 0$ , on a :  $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda I + A)} {}^t(\text{com}(\lambda I + A))$ , donc les composantes relativement à la base canonique de  $M_n(\mathbb{R})$  de  $R_\lambda(A)$  sont des fractions rationnelles en  $\lambda$  et par suite l'application  $\Phi : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par la question 5.a) et pour  $\lambda > 0$  fixe, pour tout  $\mu > 0$ , tel que  $\mu \neq \lambda$ , on a :  $\frac{\Phi(\lambda) - \Phi(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{R_\lambda(A) - R_\mu(A)}{\lambda - \mu} = -R_\lambda(A)R_\mu(A) = -\Phi(\lambda)\Phi(\mu)$

Comme l'application  $M \mapsto R_\lambda(A)M$  est linéaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ , donc est continue, d'où  $\lim_{\mu \rightarrow \lambda} (-R_\lambda(A)R_\mu(A)) = -R_\lambda(A) \lim_{\mu \rightarrow \lambda} R_\mu(A) = -(R_\lambda(A))^2 = -\Phi^2(\lambda)$  (l'application étant continue). On conclut alors que  $\Phi' = -\Phi^2$ .

Par dérivation de l'expression précédente, on obtient :  $\Phi'' = -2\Phi\Phi' = 2\Phi^3$ . Si pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi^{(p)} = a_p\Phi^{p+1}$ , on a :  $\Phi^{(p+1)} = a_p(p+1)\Phi^p\Phi' = (p+1)a_p(-\Phi^{p+2})$ , donc  $a_{p+1} = -(p+1)a_p$  avec  $a_1 = -1$ . D'où  $a_p = (-1)^p p!$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$

En conclusion :

$$\Phi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]0, +\infty[, \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}, \Phi^{(p)} = (-1)^p p! \Phi^{p+1}$$

### Partie III

9. Soit  $\lambda > 0$ , montrons que  $F(\lambda)$  est inversible.

Il suffit de vérifier que  $F(\lambda)$  est injective. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $F(\lambda)x = 0$ , par la question 5., on a :  $F(1) - F(\lambda) = (\lambda - 1)F(1)F(\lambda)$ , donc

$F(1)x - \underbrace{F(\lambda)x}_{=0} = (\lambda - 1)F(1)\underbrace{(F(\lambda)x)}_{=0} = 0$ , et par suite  $F(1)x = 0$ . Et comme  $F(1)$  est inversible, il en résulte que

$x = 0$  et par conséquent  $F(\lambda)$  est injective.

En conclusion :  $F(\lambda)$  est bien inversible.

10. .

(a) Par *ii*) via la question 9., on a en composant à gauche par  $F(\lambda)^{-1}$  :

$I - F(\lambda)F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\mu)$  et puis en composant à droite, la dernière relation, par  $F(\mu)^{-1}$  il vient :  $F(\mu)^{-1} - F(\lambda)^{-1} = (\mu - \lambda)I$ . Donc :

$$F(\mu)^{-1} - F(\lambda)^{-1} = (\mu - \lambda)I$$

(b) Prenons  $\mu > 0$ , et  $\lambda > 0$ , alors par la question 10.a), on a :  $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)I$ , donc  $F(\lambda)^{-1} = F(\mu)^{-1} + (\lambda - \mu)I \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} F(\mu)^{-1} - \mu I$ .

On déduit alors :  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda)^{-1} = F(\mu)^{-1} - \mu I = A$  et ceci pour tout  $\mu > 0$ .

11. Montrons que  $AF(\lambda)$  et  $A$  sont s-positives :

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , par la question 10.a), on a :  $I = (\lambda I + A)F(\lambda) = \lambda F(\lambda) + AF(\lambda)$ , donc  $AF(\lambda) = I - \lambda F(\lambda)$  et puis  $(AF(\lambda)x/x) = (x - \lambda F(\lambda)x/x) = \|x\|^2 - \lambda(F(\lambda)x/x)$ .

Par *i*) et l'inégalité de Cauchy schwartz, on a :

$$\begin{aligned} (F(\lambda)x/x) &\leq \|F(\lambda)x\| \|x\| = \|F(\lambda)\| \|x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|x\|^2 \end{aligned}$$

donc  $\|x\|^2 - \lambda(F(\lambda)x/x) \geq 0$  et par suite  $AF(\lambda)$  est s-positive.

Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tel que  $F(\lambda)y = x$  (car  $F(\lambda)$  est inversible), donc :  $(Ax/F(\lambda)^{-1}x) = (AF(\lambda)y/y) \geq 0$ .

Or  $(Ax/F(\lambda)^{-1}x) = (Ax/(\lambda I + A)x) = \lambda(Ax/x) + \|Ax\|^2$ , donc  $(Ax/x) \geq -\frac{1}{\lambda} \|Ax\|^2$  pour tout  $\lambda > 0$ . Par passage à la limite lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , il vient :  $(Ax/x) \geq 0$  pour tout  $x$  et par suite  $A$  est s-positive.

### Partie IV

12. Supposons *i*), soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , posons  $\varphi(t) = \|\exp(-tA)x\|^2$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  ..

Pour  $t$  et  $t_0$  dans  $\mathbb{R}_+$ , on a :  $\varphi(t + t_0) = \|\exp(-(t + t_0)A)x\|^2 = \|\exp(-tA)\exp(-t_0A)x\|^2$  car  $tA$  et  $t_0A$  commutent.

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{par } i)}{\leq} \underbrace{\|\exp(-tA)\|^2}_{\leq 1} \|\exp(-t_0A)x\|^2 \\ &\leq \|\exp(-t_0A)x\|^2 = \varphi(t_0) \end{aligned}$$

D'où :  $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}_+, \varphi(t + t_0) \leq \varphi(t_0)$  et par conséquent  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

En conclusion : *i*)  $\Rightarrow$  *ii*)

Supposons *ii*) : Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi(t) = (\exp(-tA)x/\exp(-tA)x)$ , donc  $\varphi$  est dérivable et

$\varphi'(t) = (-A \exp(-tA)x / \exp(-tA)x) + (\exp(-tA)x / -A \exp(-tA)x) = -2(A \exp(-tA)x / \exp(-tA)x)$  ( dérivation du produit scalaire ).

Si l'on pose  $y = \exp(-tA)x$ , on a alors :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi'(t) = -2(Ay/y)$

Par *ii*)  $\varphi$  est dérivable et décroissante, donc :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi'(t) = -2(Ay/y) \leq 0$  et par suite  $(Ay/y) \geq 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  (  $\exp(-tA)$  est inversible ). Ce qui prouve que  $A$  est s-positive .D'où *iii*) .

Supposons *iii*) : Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ , pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec  $y = \exp(-tA)x$ , on a :

$(A \exp(-tA)x / \exp(-tA)x) = (Ay/y) \geq 0$ , donc  $\varphi'(t) = -2(A \exp(-tA)x / \exp(-tA)x) \leq 0$  et par suite  $\varphi$  est décroissante. D'où *ii*)

En conclusion : *ii*)  $\Leftrightarrow$  *iii*)

Reste a prouver que *ii*)  $\Rightarrow$  *i*) pour conclure :

Supposons *ii*), on a alors :  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ , donc  $\|\exp(-tA)x\| \leq \|\exp(0)x\| = \|x\|$  et par suite

$$\|\exp(-tA)x\| \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|\exp(-tA)y\|}{\|y\|} \leq 1.$$

Dans la suite  $A$  est s-positive .

13. D'après la question 12. l'application  $t \mapsto \|\exp(-tA)x\|$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  (  $\forall t \geq 0$ ;  $\|\exp(-tA)x\| \leq 1$  ), donc pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $t \mapsto (\exp(-tA))_{i,j}$  est bornée et par suite  $t \mapsto \exp(-\lambda t)(\exp(-tA))_{i,j}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  .

Notons par  $\rho(\lambda)$  la matrice  $(\rho(\lambda))_{i,j}$

14. On a :  $\rho(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(-tAdt = \int_0^\infty \exp(-t\lambda I - tA)dt = \int_0^\infty \exp(-t(\lambda I + A))dt$ . Donc :

$$\begin{aligned} A\rho(\lambda) + \lambda\rho(\lambda) &= \int_0^\infty (A + \lambda I) \exp(-t(\lambda I + A)) dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \exp(-t(\lambda I + A)) dt \\ &= [-\exp(-t(\lambda I + A))]_{t=0}^{t=+\infty} = I \end{aligned}$$

car  $\|\exp(-t(\lambda I + A))\| = e^{-t\lambda} \underbrace{\|\exp(-tA)\|}_{\leq 1} \leq e^{-t\lambda} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  ( $\lambda > 0$ ).

On conclut alors que  $\rho(\lambda)(\lambda I + A) = (\lambda I + A)\rho(\lambda) = I$  et par suite

$$\rho(\lambda) = (\lambda I + A)^{-1} = R_\lambda(A).$$

15. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  on a :  $(-A)^2 = -I$ , donc :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $(-A)^k = \begin{cases} (-1)^p I & \text{si } k = 2p \\ (-1)^{p+1} A & \text{si } k = 2p + 1 \end{cases}$  et par suite

$\exp(-tA) = \sum_{p=0}^\infty \frac{(-t)^p}{(2p)!} t^{2p} I - \sum_{p=0}^\infty (-t)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A = \cos(t)I - \sin(t)A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$  ( il y'a plusieurs façons

de calculer l'exponentielle de la matrice d'une similitude )

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-t\lambda} \exp(-tA)dt = \begin{pmatrix} \int_0^\infty e^{-t\lambda} \cos(t)dt & -\int_0^\infty e^{-t\lambda} \sin(t)dt \\ \int_0^\infty e^{-t\lambda} \sin(t)dt & \int_0^\infty e^{-t\lambda} \cos(t)dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda^2 + 1} (-\lambda) & \frac{1}{\lambda^2 + 1} (-1) \\ -\frac{1}{\lambda^2 + 1} (-1) & -\frac{1}{\lambda^2 + 1} (-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2 + 1} & -\frac{1}{\lambda^2 + 1} \\ \frac{1}{\lambda^2 + 1} & \frac{1}{\lambda^2 + 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

( par calcul intégral), d'où le résultat de obtenu à la question 4.)