

Corrigé CCP math I PSI 2003

PARTIE I

Question I.1 L'application $t \mapsto \mu(t) \cos t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental de l'intégration G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $G'(x) = \mu(x) \cos x$. De même pour H , avec $H'(x) = \mu(x) \sin x$. On en déduit

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin x \mu(x) \cos x + \cos x \int_0^x \mu(t) \cos t \, dt + \sin x \int_0^x \mu(t) \sin t \, dt - \cos x \mu(x) \sin x \\ &= \cos x \int_0^x \mu(t) \cos t \, dt + \sin x \int_0^x \mu(t) \sin t \, dt. \end{aligned}$$

D'où $F(0) = 0$ et $F'(0) = 0$.

Question I.2

G et H étant de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que F' est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc que F est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus,

$$F''(x) = -\sin x G(x) + \cos^2 x \mu(x) + \cos x H(x) + \sin^2 x \mu(x) = -F(x) + \mu(x).$$

Donc

$$F''(x) + F(x) = \mu(x).$$

Question I.3

F vérifie le problème de Cauchy linéaire

$$y'' + y = \mu, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

et d'après le cours il y a unicité de la solution de ce problème donc $F = \varphi$.

Remarque : l'égalité $\varphi(x) = \sin x \int_0^x \mu(t) \, dt - \cos x \int_0^x \mu(t) \, dt$ s'obtient aussi en appliquant la méthode de variation des constantes pour résoudre (E_μ) .

Question I.4

I.4.1 En dérivant : $G'(x+2\pi) - G'(x) = \mu(x+2\pi) \cos(x+2\pi) - \mu(x) \cos x = 0$ car μ est 2π -périodique. De même $H'(x+2\pi) - H'(x) = 0$.

I.4.2 La fonction $x \mapsto G(x+2\pi) - G(x)$ est donc constante, égale à sa valeur en $x = 2\pi$, soit :

$$G(x+2\pi) - G(x) = G(2\pi).$$

De même, $H(x+2\pi) - H(x) = H(2\pi)$.

I.4.3

$$\begin{aligned} \varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = F(x+\pi) - F(x) &= (G(x+2\pi) - G(x)) \sin x - (H(x+2\pi) - H(x)) \cos x \\ &= G(2\pi) \sin x - H(2\pi) \cos x. \end{aligned}$$

I.4.4 La famille $(\cos, \sin)$ étant libre, F est 2π -périodique si et seulement si $G(2\pi) = H(2\pi) = 0$.

I.4.5 Avec $\mu = \sin$ on a $G(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = 0$ et $H(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi \neq 0$ donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas 2π -périodique. Même conclusion pour $\varphi_{\cos}$ car alors $G(2\pi) = \pi \neq 0$.

I.4.6 Pour $\mu = \sin$ et pour tout entier n on a

$$\varphi(2n\pi) = F(2n\pi) = 0 \times 0 - \cos(2n\pi) \times n\pi = -n\pi$$

donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas bornée.

Pour $\mu = \cos$ et pour tout entier n on a

$$G\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = n\pi$$

d'où

$$\varphi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = F\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi$$

donc $\varphi_{\cos}$ n'est pas bornée.

Autre méthode : on peut aussi calculer

$$\varphi_{\sin}(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

et

$$\varphi_{\cos}(x) = \frac{1}{2} x \sin x.$$

I.4.7 Pour $\mu = |\sin|$

$$G(2\pi) = \int_0^{2\pi} |\sin t| \cos t dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cos t dt,$$

et en faisant $t = \pi + u$ dans la deuxième intégrale cela donne $G(2\pi) = 0$. On obtient par le même procédé $H(2\pi) = 0$, ce qui établit que φ est 2π -périodique.

I.4.8 φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodique, les applications φ , φ' et φ'' sont continues et 2π -périodiques donc bornées : en effet on a alors $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\pi])$ qui est donc une partie compacte de $\mathbb{R}$ et de même pour φ' et φ'' .

PARTIE II

Question II.1 $t \mapsto e^{-t} |\sin t|$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq e^{-t} |\sin t| \leq e^{-t}$ ce qui montre que $t \mapsto e^{-t} |\sin t|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $t \mapsto e^{-t}$ l'est.

Question II.2

II.2.1 $v_0 = \int_0^{\pi} e^{-t} |\sin t| dt = \Im \left(\int_0^{\pi} e^{(-1+i)t} dt \right) = \Im \left[\frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i} \right]_0^{\pi} = \Im \left[\frac{-1-i}{2} (-e^{-\pi} - 1) \right]$ ce qui donne : $v_0 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$.

II.2.2 Avec le changement de variable $t = n\pi + u$ on obtient :

$$v_n = \int_0^{\pi} e^{-n\pi - u} |\sin u| du = e^{-n\pi} v_0 = (e^{-\pi})^n v_0.$$

II.2.3 $\sum_{n \geq 0} v_n$ est donc une série géométrique de raison $\rho = e^{-\pi} \in]-1, 1[$ donc convergente. De plus sa somme est égale à

$$\frac{v_0}{1 - \rho} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2(1 - e^{-\pi})} = \frac{1}{2} \coth \frac{\pi}{2}.$$

II.2.4 La fonction $t \mapsto e^{-t} |\sin t|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin t| dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-t} |\sin t| dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} e^{-t} |\sin t| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Question II.3

II.3.1 Nous avons vu que φ était bornée sur $\mathbb{R}^+$. Posons $M = \sup_{\mathbb{R}^+} |\varphi|$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |e^{-t}\varphi(t)| \leq Me^{-t}.$$

Donc l'application $t \mapsto e^{-t}\varphi(t)$ est continue et majorée en module par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ce qui prouve qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De même pour les deux autres.

II.3.2 Soit $X \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^X \varphi(t)e^{-t} dt &= [-e^{-t}\varphi(t)]_0^X + \int_0^X \varphi'(t)e^{-t} dt \\ &= -\varphi(X)e^{-X} + [-e^{-t}\varphi'(t)]_0^X + \int_0^X \varphi''(t)e^{-t} dt \\ &= -\varphi(X)e^{-X} - \varphi'(X)e^{-X} + \int_0^X \varphi''(t)e^{-t} dt. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

En faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient : $\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \varphi''(t)e^{-t} dt$.

Or $\varphi(t) + \varphi''(t) = \mu(t)$ donc $\varphi(t)e^{-t} + \varphi''(t)e^{-t} = \mu(t)e^{-t}$ ce qui donne

$$2 \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \mu(t)e^{-t} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-t} dt = \frac{1}{4} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

PARTIE III

Question III.1

III.1.1 μ est 2π -périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de convergence normale s'applique et la suite des sommes partielles de la série de Fourier de μ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers μ .

III.1.2 De même pour φ puisque φ est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Question III.2

III.2.1 μ étant paire on a pour tout n entier naturel $b_n(\mu) = 0$ et

$$\begin{aligned} a_n(\mu) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mu(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t) dt. \end{aligned}$$

On distingue : $a_1(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2t) dt = 0$ et,

$$\begin{aligned} \sin n \neq 1 \quad a_n(\mu) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n-1)t}{n-1} - \frac{\cos(n+1)t}{n+1} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[((-1)^{n-1} - 1) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)(n+1)}. \end{aligned}$$

Soit pour tout entier naturel p :

$$\begin{aligned} a_{2p}(\mu) &= -\frac{4}{\pi(2p-1)(2p+1)} = \frac{-4}{\pi(4p^2-1)} \\ a_{2p+1}(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

III.2.2 On peut justifier la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{4p^2-1} \widetilde{p \rightarrow \infty} \frac{1}{4p^2} > 0.$$

En appliquant le résultat de **III.1.1** on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2pt)}{4p^2-1}$$

qui donne pour $t = 0$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$$

et donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}.$$

III.2.3 Cette fois on justifie la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{(4p^2-1)^2} \widetilde{p \rightarrow \infty} \frac{1}{16p^4} > 0.$$

On retrouve la convergence et on obtient de plus la somme grâce au théorème de Parseval qui s'applique à μ puisque μ est 2π -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2 \right]$$

soit

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} \right]$$

soit

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

et finalement

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Question III.3

III.3.1 Maintenant $G(x) = \int_0^x |\sin t| \cos t \, dt$ et donc $G(-x) = \int_0^{-x} |\sin t| \cos t \, dt = -G(x)$ après avoir fait le changement de variable $u = -t$. Donc G est impaire. De même H est paire. On en déduit que $F(= \varphi)$ est paire. Et donc $b_n(\varphi) = 0$ pour $n \in N^*$.

III.3.2

$$\begin{aligned}
 a_n(\varphi'') &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi''(t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} [\varphi'(t) \cos(nt)]_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'(t) \sin(nt) dt \\
 &= 0 + \frac{n}{\pi} [\varphi(t) \sin(nt)]_0^{2\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt \\
 &= -n^2 a_n(\varphi).
 \end{aligned}$$

Pour la troisième égalité on a utilisé le fait que φ' est 2π -périodique.

III.3.3 On a $\varphi + \varphi'' = \mu$ et donc par linéarité des coefficients de Fourier $a_n(\varphi) + a_n(\varphi'') = a_n(\mu)$ soit $(1 - n^2)a_n(\varphi) = a_n(\mu)$.

Donc pour $n \neq 1$ on a $a_n(\varphi) = \frac{1}{1 - n^2} a_n(\mu)$ ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p}(\varphi) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(1 - 4p^2)(4p^2 - 1)} = \frac{4}{\pi(4p^2 - 1)^2}$$

et

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p+1}(\varphi) = 0.$$

III.3.4 φ étant 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ le théorème de convergence normale peut lui être appliqué et donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{2}{\pi} + a_1(\varphi) \cos x + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{(4p^2 - 1)^2}$$

Pour $x = 0$ on obtient

$$\varphi(0) = 0 = \frac{2}{\pi} + a_1(\varphi) + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}$$

d'où l'on tire

$$a_1(\varphi) = -\frac{\pi}{4}.$$

Question III.4 On justifie la convergence de la série par le fait que

$$\frac{1}{(4p^2 - 1)(16p^4 - 1)} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{64p^6} > 0.$$

En reprenant les notations précédentes on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-t} \varphi(t) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[\frac{2}{\pi} + a_1 \cos t + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} \cos(2pt) \right] dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + a_1 \int_0^{+\infty} \cos t e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} \cos(2pt) e^{-t} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Il s'agit donc maintenant de justifier l'interversion série-intégrale.

- $t \mapsto a_{2p} \cos(2pt) e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$,
- la série de fonctions $\sum a_{2p} \cos(2pt) e^{-t}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue,
- $\int_0^{+\infty} |a_{2p} \cos(2pt) e^{-t}| dt \leq |a_{2p}| = \frac{4}{\pi(4p^2 - 1)^2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{16\pi p^4} (> 0)$ terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes s'applique et permet donc l'interversion. On calcule d'abord

$$\int_0^{+\infty} \cos(nt) e^{-t} dt = \Re \left[\int_0^{+\infty} e^{(-1+in)t} dt \right] = \Re \left[\frac{e^{(-1+in)t}}{-1+in} \right]_0^{+\infty} = \Re \left[\frac{-1}{-1+in} \right] = \frac{1}{1+n^2}$$

d'où $\int_0^{+\infty} \cos t e^{-t} dt = \frac{1}{2}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(2pt) e^{-t} dt = \frac{1}{1+4p^2}$ donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \varphi(t) dt = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2(4p^2+1)}$$

et donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)(16p^4-1)} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{4} \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{8} \right]$$

Question III.5

III.5.1 $G_\varphi(2\pi) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos t dt = \pi a_1(\varphi) \neq 0$ donc ϕ n'est pas 2π -périodique d'après le critère de **I.4.4**.

III.5.2 On a $\phi(x) = \sin x G_\varphi(x) - \cos x H_\varphi(x)$ donc

$$\begin{aligned} \phi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= G_\varphi\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \varphi(t) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \cos t dt + n \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \cos t dt + n\pi a_1(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

ce qui prouve que ϕ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

III.5.3 Soit $x \geq 0$. Alors

$$|G_\varphi(x)| = \left| \int_0^x \varphi(t) \cos t dt \right| \leq N_\infty(\varphi)x$$

et de même

$$|H_\varphi(x)| = \left| \int_0^x \varphi(t) \sin t dt \right| \leq N_\infty(\varphi)x.$$

On en déduit

$$|\phi(x)| = |F_\varphi(x)| \leq 2xN_\infty(\varphi),$$

et donc

$$|e^{-t}\phi(t)| \leq 2N_\infty(\varphi)t e^{-t} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Ainsi l'application $t \mapsto e^{-t}\phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, négligeable devant une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.