

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

deuxième composition de mathématiques **Durée : 5 heures**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, \mathcal{E} désigne l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, E l'espace vectoriel associé, γ un élément de l'intervalle $[0, 1[$, n un entier supérieur ou égal à 3, $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé direct de \mathcal{E} . Les coordonnées des points de \mathcal{E} sont définies par rapport à ce repère.

On dit qu'une paire $\{d_1, d_2\}$ de deux droites de \mathcal{E} est de rapport γ s'il existe des vecteurs directeurs unitaires \vec{u}_1 de d_1 et \vec{u}_2 de d_2 dont le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ est égal à γ .

On appelle gerbe d'ordre n et de rapport γ tout ensemble G de n droites de \mathcal{E} , concourantes en un point Ω , et telles que toute paire formée de deux droites de G soit de rapport γ . Le point Ω est appelé centre de la gerbe G .

Les objectifs du problème sont la détermination de tous les couples (n, γ) pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre n et de rapport γ et, pour chaque couple de ce type, la classification à une isométrie près de toutes les gerbes d'ordre n et de rapport γ .

A. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

A.1. Gerbes isométriques.

A.1.1. Soit $G = \{d_1, \dots, d_n\}$ une gerbe d'ordre n et de rapport γ , et soit f une isométrie de \mathcal{E} . Montrer que l'ensemble G' des n droites $d'_1 = f(d_1), \dots, d'_n = f(d_n)$ est une gerbe dont on précisera le rapport.

La gerbe G' est appelée la gerbe image de G par l'isométrie f .

Convention : Les gerbes images de G par les isométries de \mathcal{E} s'appellent les gerbes isométriques à G .

A.1.2. Étant donné deux gerbes G et G' , montrer que, si G' est isométrique à G , alors G est isométrique à G' . On dira, dans ce cas, que G et G' sont isométriques.

A.2. Exemples de gerbes d'ordre 3.

A.2.1. Soient d_1 et d_2 deux droites de \mathcal{E} , de vecteurs directeurs respectifs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . Montrer que la paire $\{d_1, d_2\}$ est de rapport γ si, et seulement si, on a : $|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| = \gamma \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|$.

A.2.2. Soit ABCD un tétraèdre régulier de \mathcal{E} . Montrer que les trois droites (AB), (AC), (AD) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

I.3. Appartenance de $S\phi$ à C^∞ .

Dans cette question ϕ est un élément quelconque de E , k est un entier strictement positif. Pour tout entier

$n \geq 0$, on désigne par u_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{t \phi(t)}{x^2 + t^2} dt$.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $S\phi$.

b. Montrer que, pour tout entier n , la fonction u_n appartient à C^∞ .

c. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t}{x^2 + t^2} = \frac{\alpha}{x - it} + \frac{\beta}{x + it}.$$

Utiliser cette égalité pour calculer $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right)$ et en déduire que, pour tout couple de réels

$$(x, t) \neq (0, 0), \text{ on a : } \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| \leq \frac{k!}{(x^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

d. On note $u_n^{(k)}$ la dérivée k -ième de la fonction u_n .

Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une constante A_k telle que, pour tout $x \geq a$ et tout entier n , on ait :

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

e. Prouver que la fonction $S\phi$ appartient à C^∞ et que, pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(S\phi)^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \phi(t) dt.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on étudie un exemple de détermination de $S\phi$ à l'aide d'une équation différentielle.

II.1. Définition d'une fonction ϕ_2 , élément de E .

Soit ϕ_2 la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\phi_2(t) = \sin t$.

Montrer que, pour tout nombre positif T , on a :

$$\int_0^T \frac{t \sin t}{x^2 + t^2} dt = \frac{-T \cos T}{x^2 + T^2} + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos t dt.$$

En déduire que ϕ_2 appartient à E .

II.2. Détermination et intégration d'une équation différentielle dont $S\phi_2$ est solution.

a. Prouver que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) = 0.$$

b. En déduire que, sur $]0, +\infty[$, la fonction $S\phi_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ (on utilisera I.3.e. et on fera deux intégrations par parties successives).

c. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle précédente sur $]0, +\infty[$.

II.3. Détermination explicite de $S\phi_2$.

a. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2} dt \right| \leq \frac{\pi}{2x}$$

(on pourra utiliser l'égalité obtenue en II.1.). En déduire la limite de $S\phi_2(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente et que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2 + 1)} d\lambda.$$

Déduire de cette égalité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2} dt$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c. On admet sans démonstration l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Expliciter la fonction $S\phi_2$.

TROISIÈME PARTIE

On désigne par T l'endomorphisme de C^∞ qui à un élément f de cet espace associe l'élément Tf défini, pour $x > 0$, par $Tf(x) = -xf'(x)$. L'identité de C^∞ est notée I et les puissances successives de T sont définies par $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T$, ..., $T^n = T \circ T^{n-1}$.

Soit G l'espace vectoriel des fonctions réelles de deux variables (x, t) définies sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et indéfiniment dérivables par rapport à la première variable. On désigne de même par T_x l'endomorphisme de G qui à un élément g de G associe l'élément $T_x g$ défini, pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, par

$$T_x g(x, t) = -x \frac{\partial g}{\partial x}(x, t).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $L_n = T \circ \left(I - \frac{T^2}{4} \right) \circ \left(I - \frac{T^2}{4 \cdot 2^2} \right) \circ \dots \circ \left(I - \frac{T^2}{4 \cdot n^2} \right)$ et on définit $L_{n,x}$ en remplaçant dans cette formule T par T_x .

III.1. Commutation de L_n et de l'intégrale.

a. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe k réels $\lambda_{k,i}$, $1 \leq i \leq k$, tels que, pour tout élément f de C^∞ et pour tout $x > 0$, on ait :

$$T^k f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i} x^i f^{(i)}(x).$$

En déduire que pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$T^k S\phi(x) = \int_0^{+\infty} T_x^k \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \phi(t) dt.$$

b. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$L_n S\phi(x) = \int_0^{+\infty} L_{n,x} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \phi(t) dt.$$

III.2. Détermination de $L_1 S\phi$.

a. Soit f un élément de C^∞ . Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(1 - \frac{T^2}{4}\right) (f)(x) = f(x) - \frac{xf'(x) + x^2 f''(x)}{4}.$$

b. Dédire de l'égalité précédente $L_{1,x} \left(\frac{1}{x^2 + t^2}\right)$ et prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$L_1 S\phi(x) = 12 \int_0^{+\infty} \frac{x^4 t^3}{(x^2 + t^2)^4} \phi(t) dt.$$

III.3. Détermination de $L_n S\phi$.

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $u(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2}$.

a. On suppose t fixé. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(1 - \frac{T_x}{2n}\right) (u^{2n})(x, t) = \frac{2t^2 u^{2n}(x, t)}{x^2 + t^2}.$$

Montrer ensuite que $\left(1 + \frac{T_x}{2n}\right) \left(\frac{u^{2n}}{x^2 + t^2}\right)$ s'exprime simplement à l'aide de n et de u^{2n+2} .

En déduire l'expression de $\left(1 - \frac{T_x^2}{4n^2}\right) (u^{2n})$ à l'aide de t , de n et de u^{2n+2} .

b. Établir, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x > 0$ et pour tout élément ϕ de E , les formules :

$$\begin{aligned} L_n S\phi(x) &= \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n+1} u^{2n+2}(x, t) \phi(t) dt \\ &= \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x)}{1+\lambda^2} d\lambda. \end{aligned}$$

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie x est un nombre réel strictement positif fixé.

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $K_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

IV.1. Étude d'une suite d'intégrales.

a. Prouver, pour tout entier $n \geq 0$, l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1+\lambda^2)^{2n+2}} d\lambda$.

b. Montrer que, pour tout n , on a :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_{n+1}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par $\lambda = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\theta \in [0, \pi[$ et faire une intégration par parties).

c. Calculer I_0 , I_n , et en déduire la valeur de $K_n I_n$.

Pour l'étude de la limite de $L_n S\phi(x)$, on écrit la formule obtenue à la fin de la troisième partie sous la forme :

$$L_n S\phi(x) = K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2} d\lambda + K_n I_n \phi(x).$$

IV.2. Comportement à l'infini de $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda) d\lambda$.

Soit a un nombre réel, $0 < a < 1$, et f une fonction continue sur $]0, a[$.

a. Montrer que, pour tout réel $\theta \in]0, 1[$, $\theta^{2n+1} K_n$ a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la série de terme général $v_n = \theta^{2n+1} K_n$ et étudier la limite du rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$).

b. En déduire la limite de $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda) d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.3. Comportement à l'infini de $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda) d\lambda$.

Soit b un nombre réel, $b > 1$, et g une fonction continue sur $]0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g(\lambda)| d\lambda$ soit convergente. Déterminer la limite de $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda) d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.4. Détermination de $\lim L_n S\phi(x)$.

Montrer, en utilisant notamment les deux résultats précédents et la continuité de ϕ en x , que

$$K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2} d\lambda$$

a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire le résultat annoncé dans les objectifs du problème.