

CENTRALE 2001

PSI

2ème épreuve

NOTA : par souci de clarté, les éléments d'une matrice A seront notés par des lettres minuscules : $A = (a_{ij})$.

Partie I

I. A. 1) Si A est triangulaire supérieure, elle laisse stable le drapeau $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ où V_k est le sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de base. Si de plus A est inversible, la restriction à chacun des V_k du morphisme correspondant est un automorphisme de V_k et A^{-1} conserve donc aussi le drapeau $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$. Par suite, A^{-1} est triangulaire supérieure. On obtient le résultat pour une matrice triangulaire inférieure inversible en remarquant que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

I. A. 2) $\mathcal{L}_n$ est un sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ non vide (il contient l'identité), stable par produit et passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe.

I. B. 1) Soit $A = LU = L'U'$ deux décompositions d'une matrice inversible. Nécessairement, les quatre matrices L , U , L' et U' sont inversibles et $L^{-1}L = U'U^{-1} \in \mathcal{L}_n \cap \mathcal{U}_n = \{I_n\}$. Autrement dit, $L = L'$ et $U = U'$.

I. B. 2) Si $A = LU$ est inversible, les éléments diagonaux de U sont tous différents de 0. De plus, en décomposant les matrices A , L et U en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, le produit par blocs donne $A_k = L_k U_k$ qui est donc une matrice inversible.

I. B. 3) Avec la décomposition en blocs proposée, $HA = \begin{pmatrix} H_{n-1}A_{n-1} & H_{n-1}V \\ H'A_{n-1} + W & H'V + a_{nn} \end{pmatrix}$. La condition imposée est donc équivalente à $H'A_{n-1} + W = 0$, soit $H' = -WA_{n-1}^{-1}$ puisque A_{n-1} est supposée inversible. Si H_{n-1} est une matrice quelconque de $\mathcal{L}_{n-1}$, la matrice $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ -WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice H^{-1} est alors de la forme $\begin{pmatrix} H_{n-1}^{-1} & 0 \\ K' & 1 \end{pmatrix}$; en calculant le produit (par blocs)

$HH^{-1} = I_n$, on obtient $K' = WA_{n-1}^{-1}H_{n-1}^{-1}$.

I. B. 4) Si $n = 1$, l'égalité $A = I_n A$ est une décomposition LU.

Admettons le résultat pour une matrice de dimension $n - 1$. Alors, si A est une matrice de taille n telle que $\det(A_k) \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la matrice extraite A_{n-1} admet une décomposition LU, soit $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$. Appliquons la question **I. B. 3)** en choisissant $H_{n-1} = L_{n-1}^{-1}$. On obtient $H^{-1} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_n$ et $HA = \begin{pmatrix} H_{n-1}A_{n-1} & L_{n-1}^{-1}V \\ 0 & WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n-1} & L_{n-1}^{-1}V \\ 0 & WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} + a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_n$ ce qui donne une décomposition LU de la matrice A , d'où, par récurrence, le résultat demandé.

Remarquons que, par construction, la matrice U_{n-1} (resp. L_{n-1}) est la matrice extraite formée des n premières lignes et n premières colonnes de U_n (resp. L_n) ce qui est cohérent avec les notations de l'énoncé.

I. C. 1) L'échange des lignes p et q s'obtient en multipliant à gauche par la matrice $E = (e_{ij})$ définie

$$\text{par } \begin{cases} e_{ij} = \delta_{ij} & \text{si } i \neq p \text{ et } j \neq q \\ & = \delta_{qj} & \text{si } i = p \\ & = \delta_{ip} & \text{si } j = q \end{cases}.$$

I. C. 2) **a)** Puisque la première ligne de L_n^{-1} est $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$, la première ligne de $U_n = L_n^{-1}A$ est égale à la première ligne de A .

b) Puisque les éléments diagonaux de la matrice triangulaire U_n^{-1} sont les inverses des éléments diagonaux de U_n , la première colonne de U_n^{-1} est $\begin{pmatrix} 1/a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; la première colonne de $L_n = AU_n^{-1}$ est

égale à la première colonne de A divisée par a_{11} .

c) Compte tenu de la remarque terminant la question **I. B. 4)**, si $A = LU$ est la décomposition de A , on obtient la décomposition de A_k sous la forme $A_k = L_k U_k$ (on l'a vu également dans **I. B. 2)**). Par conséquent, $u_{kk} = \frac{\det(U_k)}{\det(U_{k-1})} = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$.

d) Soit i et j deux entiers tels que $2 \leq j \leq i \leq n$ et P la matrice de permutation des lignes i et j . De la décomposition $A = LU$, on tire $PA = (PL)U$ puis on calcule le produit du membre de droite par blocs en s'intéressant uniquement au bloc de PA formé des j premières lignes et colonnes : grâce aux 0 de la matrice U , il est égal au produit des blocs supérieurs gauches.

$$PA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1j-1} & a_{j-1j} & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{j-11} & \dots & 1 & 0 & \vdots \\ l_{i1} & \dots & l_{ij-1} & l_{ij} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1j-1} & u_{1j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{j-1j-1} & u_{j-1j} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{ij} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

On en déduit, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & j \\ 1 & \dots & j-1 & i \end{bmatrix}_A = l_{ij} \det(U_j) = l_{ij} \det(A_j), \text{ d'où } l_{ij} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & j \\ 1 & \dots & j-1 & i \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & j \\ 1 & \dots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}.$$

e) Soit i et j deux entiers tels que $2 \leq i \leq j \leq n$ et P la matrice de permutation des lignes i et j . On effectue le produit par blocs $AP = L(UP)$ en exploitant cette fois les 0 de la dernière "colonne" de L

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & a_{1j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1i-1} & a_{i-1i} & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii-1} & a_{ii} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{i-1i} & \dots & 1 & 0 & \vdots \\ l_{i1} & \dots & l_{ii-1} & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1i-1} & u_{1j} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{i-1i-1} & u_{i-1j} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{ij} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

puis, en prenant le déterminant des blocs supérieurs gauches :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & j \end{bmatrix}_A = u_{ij} \det(U_{i-1}) = u_{ij} \det(A_{i-1}), \text{ d'où } l_{ij} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 & i \\ 1 & \dots & i-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & \dots & i-2 & i-1 \\ 1 & \dots & i-2 & i-1 \end{bmatrix}_A}.$$

I. D. LU := proc (A, n)

 local i, j;
 global L, U;

 for i to n
 do L[i,1] := A[i,1]/A[1,1];

```

        L[i,i] := 1;
        for j from i+1 to n
            do          L[i,j] := 0
            od
        od;
    for i from 3 to n
        do for j from 2 to i-1
            do L[i,j] := det(submatrix(swaprow(A,i,j),1 .. j,1 .. j))/det(submatrix(A,1 .. j,1 .. j)) od
        od;
    for j to n
        do          U[1,j] := A[1,j];
            for i from j+1 to n do U[i,j] := 0 od
        od;
    for j from 2 to n
        do U[j,j] := det(submatrix(A,1 .. j,1 .. j))/U[j-1,j-1];
            for i from 2 to j-1
                do U[i,j] := det(submatrix(swapcol(A,i,j),1 .. i,1 .. i))/det(submatrix(A,1 .. i-1,1 .. i-1))
                od
            od
    end;
end;

```

I. E. 1) *Etape a)* première ligne de U : $(1 \ 1 \ 3 \ 1)$.

Etape b) première colonne de L : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Etape c) diagonale de U : $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$.

Etape d) $l_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$ $l_{42} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -2$ $l_{43} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = -5.$

Etape e) $u_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2$ $u_{24} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 2$ $u_{34} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0.$

Finalement, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

La résolution du système $AX = Y$ s'effectue donc en résolvant deux systèmes triangulaires l'un

après l'autre : $L \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, puis $U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ qui est

équivalent à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1/4 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 13/4 & -15/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 5/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

I. E. 2) Le produit de deux matrices L et U générales de taille 2 s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ ab & ac+d \end{pmatrix}$.

Donc, si $b = c = 0$, a n'intervient pas dans le produit. En particulier, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux décompositions LU distinctes de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On voit également que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de décomposition LU puisque les conditions $b = 0$ et $ab = 1$ sont évidemment incompatibles.

I. E. 3) a) En identifiant les termes de degré r dans l'identité polynomiale $(1+X)^{p+q} = (1+X)^p (1+X)^q$ dans laquelle on aura utilisé la formule du binôme, obtient $C_{p+q}^r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_p^k C_q^{r-k}$.

b) Dans cet exemple, $a_{ij} = C_{p+j-1}^{i-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j-1}^k C_p^{i-1-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_p^{i-1-k} C_{j-1}^k = \sum_{k=1}^n C_p^{i-k} C_{j-1}^{k-1}$, la dernière somme étant obtenue en remplaçant k par $k-1$. On reconnaît alors A comme le produit des matrices de

terme général C_p^{i-j} et C_{j-1}^{i-1} respectivement, c'est à dire des matrices $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_p^1 & 1 & 0 & & 0 \\ C_p^2 & C_p^1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ C_p^{n-1} & C_p^{n-2} & \cdots & C_p^1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$ ce qui donne la décomposition cherchée et, en prime, $\det(A) = \det(U) = 1$.

En particulier, pour $p = 1$ et $n = 4$, l'égalité $A = LU$ s'explique en

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II

II. A. Soit A une matrice symétrique définie positive et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale formée de vecteurs propres de A ; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Si $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ est un vecteur non

nul arbitraire, ${}^t v A v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 > 0$. Réciproquement, supposons que ${}^t v A v > 0$ pour tout vecteur non nul. Si λ est une valeur propre quelconque de A et si v est un vecteur propre associé, alors ${}^t v A v = \lambda \|v\|^2 > 0$ ce qui montre que λ est strictement positif.

II. A. 1) Une matrice symétrique A est donc définie positive ssi c'est la matrice d'une forme quadratique définie positive. La restriction de cette forme quadratique au sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique est (dans cette même base) la matrice A_k qui est donc elle aussi définie positive ; en particulier, son déterminant est strictement positif (produit de ses valeurs propres) et on peut donc appliquer **I. B.** pour obtenir l'existence d'une décomposition LU de A .

II. A. 2) Puisque $u_{ii} = \frac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})}$, la question précédente prouve que $u_{ii} > 0$ pour tout i .

II. B. 1) Ecrivons $L = L \begin{pmatrix} u_{110} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} 1/u_{110} & 0 & 0 \\ 0 & 1/u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/u_{33} \end{pmatrix} U$. Alors

$A = {}^t A = {}^t (L' U') = {}^t U {}^t L'$ est aussi une décomposition LU de A . Par unicité d'une telle décomposition (cf. **I. B. 1**), $L = {}^t U'$ et $U = {}^t L'$, d'où

$$L \begin{pmatrix} \sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} = {}^t U \begin{pmatrix} 1/\sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{u_{33}} \end{pmatrix}.$$

Posons $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} U \in \mathcal{U}_n$; on peut écrire

$$A = L \begin{pmatrix} \sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{u_{110}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{u_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{u_{33}} \end{pmatrix} U = {}^t B B.$$

II. B. 2) Soient $A = {}^t B B = {}^t B' B'$ deux telles décompositions de A . Alors $B B'^{-1} = {}^t B'^{-1} B'$; cette égalité d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure prouve qu'elles sont toutes les deux diagonales. De plus l'égalité du i -ème élément diagonal s'écrit $\frac{b_{ii}}{b'_{ii}} = \frac{b'_{ii}}{b_{ii}}$ ce qui, par l'hypothèse de positivité de b_{ii} et de b'_{ii} , impose que $b'_{ii} = b_{ii}$ et donc que la matrice diagonale $B B'^{-1}$ est la matrice I_n . Cela prouve l'unicité demandée.

II. C. i) $\Rightarrow$ iii) C'est une conséquence immédiate de ce qui a été dit dans la question **II. A.**.

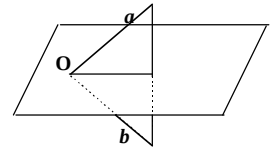
iii) $\Rightarrow$ ii) L'hypothèse permet d'écrire une décomposition LU pour M d'après **I. B. 4**), soit $M = L U$. Les éléments diagonaux de U étant strictement positifs et la matrice M étant symétrique, l'argument de **II. B. 1**) s'applique sans changement et permet d'écrire $M = {}^t B B$ où B est une matrice inversible.

ii) $\Rightarrow$ i) Si X est un vecteur propre de M associé à une valeur propre quelconque λ de M , ${}^t X M X = \lambda \|X\|^2 = {}^t X {}^t B B X = \|B X\|^2$. Comme B est inversible, $B X$ n'est pas le vecteur nul et λ est donc strictement positif.

Partie III

III. A. 1) La matrice $H^{(v)}$ est celle d'une symétrie car $H^{(v)^2} = I_n - 2v {}^t v + 4v {}^t v {}^t v = I_n$ et comme cette matrice est symétrique, il s'agit d'une symétrie orthogonale. Les vecteurs orthogonaux à v sont invariants par $H^{(v)}$ et les vecteurs colinéaires à v sont anti-invariants. Donc $H^{(v)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

III. A. 2) Puisqu'une symétrie orthogonale est une isométrie le vecteur $H^{(v)}(a)$ doit être égal au vecteur $b = (\|a\|, 0, \dots, 0)$ ou à son opposé. Il est évident géométriquement que pour $v = \frac{a-b}{\|a-b\|}$, $H^{(v)}(a) = b$.



III. B. 1) La démonstration se fait par récurrence sur la taille n des matrices. Il n'y a rien à démontrer si $n = 1$ car dans ce cas, toute matrice est dans $\mathcal{U}_1$. Supposons vrai le résultat pour toute matrice de taille $n - 1$ et soit A une matrice quelconque de taille n . D'après **III. A.**, il existe une matrice H_1 (de taille n) telle que

$$H_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ On peut alors écrire } H_1 A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array} \right). \text{ On peut alors trouver des matrices de}$$

Householder $H'_2, H'_3, \dots, H'_n$ de taille $n - 1$ telles que $H'_n H'_{n-1} \dots H'_2 A' \in \mathcal{U}_{n-1}$. Si on pose

$$H_i = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & H'_i & \\ 0 & & & \end{array} \right), \text{ un calcul de produit par blocs montre que } H_n H_{n-1} \dots H_2 H_1 A \in \mathcal{U}_n, \text{ ce qui permet de}$$

conclure.

III. B. 2) On a vu dans **III. A. 2)** que l'on pouvait choisir comme image du vecteur a par $H^{(v)}$ le vecteur $(\|a\|, 0, \dots, 0)$. Si l'on fait ce choix pour définir les matrices H_i de la question précédente, $R = H_n H_{n-1} \dots H_2 H_1 A \in \mathcal{U}_n^+$. D'autre part, une matrice de Householder est orthogonale et par conséquent, $Q = (H_n H_{n-1} \dots H_2 H_1)^{-1}$ est orthogonale. Donc toute matrice carrée de taille n admet une décomposition QR.

III. B. 3) Si A est inversible, R l'est aussi. Si $A = QR = Q' R'$ sont deux décompositions, on peut écrire $Q'^{-1} Q = R' R^{-1}$. Or les vecteurs colonnes de la matrice triangulaire $R' R^{-1}$ ne peuvent être orthogonaux et normés que si cette matrice est diagonale et si ses éléments diagonaux valent ± 1 . $R' R^{-1} \in \mathcal{U}_n^+$, la seule possibilité est que $R' R^{-1} = I_n$, c'est à dire $R = R'$, d'où $Q = Q'$. La décomposition QR de A est donc unique.

III. C. Notons $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique (orthonormale) de $\mathbf{R}^n$ et $\varepsilon_i = A e_i$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$. Si A est inversible, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ est une base de $\mathbf{R}^n$ que l'on peut orthogonaliser par le procédé de Schmidt (matrice de passage triangulaire supérieure à élément diagonaux égaux à 1) puis normaliser en divisant chaque vecteur obtenu par sa norme (matrice de passage diagonale à élément diagonaux positifs). En appelant $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ la base ainsi obtenue, la matrice de passage de $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ à $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une matrice $\tilde{R} \in \mathcal{U}_n^+$. De plus, la matrice de passage de $\{e_1, \dots, e_n\}$ à $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une matrice orthogonale Q . On a donc $A \tilde{R} = Q$, d'où $A = Q \tilde{R}^{-1}$ qui est bien une décomposition QR de A .

Partie IV

IV. A. 1) Comme les coefficients de la matrice $M_k N_k$ sont des fonctions polynomiales (donc continues) des coefficients de M_k et N_k , la convergence des suites $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers M et N respectivement implique la convergence de la suite $(M_k N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers MN .

IV. A. 2) a) Il résulte de la définition que pour tout vecteur X non nul, $\left\| M \frac{X}{\|X\|} \right\| \leq \|M\|$, donc que $\|MX\| \leq \|M\| \|X\|$. Cette inégalité est en outre vérifiée si $X = 0$. Par suite, $\|MN\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|MNX\| \leq \sup_{\|X\| \leq 1} \|M\| \|NX\| \leq \|M\| \|N\|$.

b) En particulier, $\|M^k\| \leq \|M\|^k$. Donc, si $\|M\| < 1$, la série de terme général $(-1)^k M^k$ est absolument convergente donc convergente de somme S . Or $(I_n + M) \sum_{k=0}^K (-1)^k M^k = I_n + (-1)^{K+1} M^{K+1}$. En passant à la limite, ce qui est justifié par **IV. A. 1)**, $(I_n + M)S = I_n$. Enfin, comme $I_n + M$ est une matrice carrée admettant S comme inverse à droite, elle est inversible d'inverse S .

IV. A. 3) Par hypothèse, les valeurs propres de A sont toutes distinctes : A est donc diagonalisable et, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, $A = PDP^{-1}$.

IV. B. Il est immédiat par récurrence que $\det(A_{k+1}) = \det(A_k)$ ce qui garantit que toutes les matrices A_k donc toutes les matrices R_k sont inversibles. L'égalité $A_{k+1} = R_k (Q_k R_k) R_k^{-1}$ montre alors que A_{k+1} est semblable à A_k et par transitivité à A .

IV. C.
$$D^k L D^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & I_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k & I_{12} & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right)^k I_{12} & 1 \end{pmatrix} . \text{ D'où } \lim_{k \rightarrow +\infty} D^k L D^{-k} = I_n .$$

IV. D. Comme E_k tend vers 0, il en est de même de $RE_k R^{-1}$ et la norme de cette matrice est donc strictement inférieure à 1 à partir d'un certain rang. L'inversibilité de $I_n + RE_k R^{-1}$ (cf. **IV. A. 2) b)**) prouve alors l'unicité d'une décomposition QR que l'on note $I_n + RE_k R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$ et comme $\tilde{R}_k$ est alors inversible, ses éléments diagonaux sont strictement positifs.

IV. E. 1) L'orthogonalité de $\tilde{Q}_k$ est caractérisée par la relation $\tilde{Q}_k^t \tilde{Q}_k = I_n$. En passant à la limite sur k , on obtient $\tilde{Q}^t \tilde{Q} = I_n$ ce qui prouve l'orthogonalité de $\tilde{Q}$.

IV. E. 2) Puisque $\tilde{R}_k = {}^t \tilde{Q}_k (I_n + RE_k R^{-1})$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{R}_k = {}^t \tilde{Q}$. Par ailleurs, cette limite, que l'on note $\tilde{R}$, est celle d'une suite de matrices de $\mathcal{U}_n^+$ qui est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Donc $\tilde{R} \in \mathcal{U}_n^+$.

IV. E. 3) On a déjà montré en **III. B. 3)** que la seule matrice orthogonale de $\mathcal{U}_n^+$ est I_n . Donc $\tilde{R} = \tilde{Q} = I_n$.

IV. F. En utilisant les décompositions QR et LU de P et P^{-1} respectivement, on peut écrire $A^k = PD^k P^{-1} = QRD^k LU$. Or $I_n + RE_k R^{-1} = RD^k L D^{-k} R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$. On en tire $RD^k L = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k RD^k$ et $A^k = Q \tilde{Q}_k \tilde{R}_k RD^k U$. Remarquons que la matrice $\tilde{R}_k RD^k U$ est dans $\mathcal{U}_n$ mais peut-être pas dans $\mathcal{U}_n^+$. Si

$\sigma_i = \pm 1$ est le signe de son i -ième élément diagonal et $\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$, alors $Q\tilde{Q}_k\Sigma_k$ est une matrice

orthogonale et $A^k = (Q\tilde{Q}_k\Sigma_k)(\Sigma_k\tilde{R}_kRD^kU)$ est l'unique décomposition QR de A^k .

D'autre part,

$$A^k = (Q_1R_1)^k = Q_1(R_1Q_1)^{k-1}R_1 = Q_1(A_2)^{k-1}R_1 = Q_1Q_2(A_3)^{k-1}R_2R_1 = \dots = Q_1Q_2\dots Q_kR_k\dots R_2R_1.$$

En identifiant ces deux décompositions QR, on obtient $\begin{cases} Q\tilde{Q}_k\Sigma_k = Q_1Q_2\dots Q_k \\ \Sigma_k\tilde{R}_kRD^kU = R_k\dots R_2R_1 \end{cases}$ pour tout k .

Remarquons ensuite que les matrices $\tilde{R}_k$ et R étant dans $\mathcal{U}_n^+$, les signes σ_i ne dépendent que des signes des éléments diagonaux de D^k et de U ; plus précisément, $\sigma_i = \text{sgn}(\lambda_i)^k \text{sgn}(u_{ii})$ et la matrice Σ_k prend alternativement les valeurs Σ_1 et Σ_2 selon la parité de k . La première égalité permet d'écrire $Q\tilde{Q}_k\Sigma_k = Q\tilde{Q}_{k-1}\Sigma_{k-1}Q_k$. En remplaçant k par $2k$, il vient après simplification par Q , $\tilde{Q}_{2k}\Sigma_2 = \tilde{Q}_{2k-1}\Sigma_1Q_{2k}$ et en passant à la limite sur k , $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_{2k} = \Sigma_2\Sigma_1$. De même, en remplaçant k par $2k+1$, on obtient $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_{2k+1} = \Sigma_1\Sigma_2$. Comme Σ_1 et Σ_2 commutent, la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\Sigma_1\Sigma_2$.

On tire alors de la deuxième égalité $\Sigma_k\tilde{R}_kRD^kU = R_k\Sigma_{k-1}\tilde{R}_{k-1}RD^{k-1}U$, d'où $\Sigma_k\tilde{R}_kRD = R_k\Sigma_{k-1}\tilde{R}_{k-1}R$. En remplaçant à nouveau k par $2k$, et après multiplication par R^{-1} à droite, il vient $\Sigma_2\tilde{R}_{2k}RDR^{-1} = R_{2k}\Sigma_1\tilde{R}_{2k-1}$ et en passant à la limite sur k , $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_{2k} = \Sigma_2RDR^{-1}\Sigma_1$. De même, en remplaçant k par $2k+1$, on obtient $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_{2k+1} = \Sigma_1RDR^{-1}\Sigma_2$.

En regroupant ces résultats, $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_{2k} = \Sigma_1RDR^{-1}\Sigma_1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_{2k+1} = \Sigma_2RDR^{-1}\Sigma_2$. Comme la matrice R est triangulaire supérieure, la matrice RDR^{-1} l'est aussi de même que $\Sigma_1RDR^{-1}\Sigma_1$ et $\Sigma_2RDR^{-1}\Sigma_2$. De plus, les éléments diagonaux de RDR^{-1} sont les valeurs propres λ_i de A ; comme la multiplication à gauche et à droite par Σ_1 revient à changer le signe de certaines lignes puis des colonnes de même indice, cette opération ne modifie pas les éléments diagonaux qui restent égaux aux λ_i , et il en est évidemment de même avec Σ_2 . Les deux sous-suites $\left((A_{2k})_{ij}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left((A_{2k+1})_{ij}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ayant même limite pourvu que $j \leq i$, les suites $\left((A_k)_{ij}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k)_{ij} = 0$ si $1 \leq j < i \leq n$.