

Première partie

1. Soit la matrice de $S_2(\mathbb{Q})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2 - 2$, donc $\sqrt{2} \in Sp(M)$.

2. 2.a Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{Q})$, alors $\chi_M = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$.

$\sqrt{3}$ étant une valeur propre de M , donc $0 = 3 - (a+c)\sqrt{3} + ac - b^2$, or $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, ce qui exige $a+c=0$ et $ac - b^2 = -3$, donc $\chi_M = X^2 - 3$.

2.b Soit $n \in \mathbb{Z}$.

→ Si $n \equiv 0 [3]$, alors $n^2 \equiv 0 [3]$.

→ Si $n \equiv 1 [3]$, alors $n^2 \equiv 1 [3]$.

→ Si $n \equiv 2 [3]$, alors $n^2 \equiv 1 [3]$.

On conclut que $n^2 \equiv 0$ ou 1 modulo 3.

2.c Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$ avec $pgcd(x, y, z) = 1$, alors $x^2 + y^2 \equiv 0 [3]$, ce qui donne par la question précédente, $\begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ y \equiv 0 [3] \end{cases}$

d'où l'existence de $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3p$ et $y = 3q$, donc $z^2 = 3p^2 + 3q^2$ et par suite $z^2 \equiv 0 [3]$ et la question précédente exige $z \equiv 0 [3]$, ce qui contredit $pgcd(x, y, z) = 1$.

2.d Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{Q})$ avec $a^2 + b^2 = 3$. On écrit $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$ où $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, alors $(ps)^2 + (rq)^2 = 3(qs)^2$.

Soit $d = pgcd(ps, rq, qs)$, alors en divisant l'égalité précédente par d^2 , on obtient une égalité de la forme $x^2 + y^2 = 3z^2$ avec $pgcd(x, y, z) = 1$, ce qui impossible par la question précédente.

On conclut que $\sqrt{3} \notin Sp(M)$.

3. 3.a $B = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & -I_n \end{pmatrix} \in S_{2n}(\mathbb{Q})$, alors B commute avec $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} A^2 + I_n & O \\ O & A^2 + I_n \end{pmatrix} = (q+1)I_{2n}$.

3.b On va raisonner par récurrence.

→ Pour $d = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_1 = I_n \in S_n(\mathbb{Q})$ et $M_1^2 = I_n$.

→ Supposons le résultat vrai pour un certain $d \geq 2$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \dots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et $M_k^2 = kI_n$ pour tout $1 \leq k \leq d$.

On considère les matrices N_1, \dots, N_{d+1} de $S_{2n}(\mathbb{Q})$ définies par :

$$N_k = \begin{pmatrix} M_k & O \\ O & M_k \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq k \leq d \text{ et } N_{d+1} = \begin{pmatrix} I_n & M_d \\ M_d & -I_n \end{pmatrix}.$$

Alors par hypothèse de récurrence, les N_k commutent et $N_k^2 = kI_{2n}$ et grâce à la question précédente, N_{d+1} commute avec N_d et $N_{d+1}^2 = (d+1)I_{2n}$.

Ainsi les N_k appartiennent à $S_{2n}(\mathbb{Q})$, commutent deux à deux et telles que $N_k^2 = kI_{2n}$ pour tout $1 \leq k \leq d+1$, ce qui achève la récurrence.

3.c Soit $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{Q}^{+*}$. Posons $q_i = \frac{a_i}{b_i} = \frac{p_i}{m}$ où $m = ppcm(b_1, \dots, b_d)$.

On remarque que $M_i^2 = q_i I_n$ si, et seulement si, $(b_i M_i)^2 = a_i b_i I_n$. Notons $D = \max(a_1 b_1, \dots, a_d b_d)$, alors d'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $N_1, \dots, N_D \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux telles que $N_k^2 = kI_n$ pour tout $1 \leq k \leq D$, donc en particulier $N_{a_i b_i}^2 = a_i b_i I_n$ pour tout $1 \leq i \leq d$, ce qui

entraîne que $\left(\frac{1}{b_i} N_{a_i b_i}\right)^2 = q_i I_n$.

On pose $M_i = \frac{1}{b_i} N_{a_i b_i}$, alors les M_i répondent à la question.

4. 4.a → Supposons que $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $pgcd(p, q) = 1$, alors $p^3 = 2q^2$, ce qui exige $p \equiv 0 [2]$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$, alors $q^3 = 4k^3$, donc $q \equiv 0 [2]$, ce qui contredit $pgcd(p, q) = 1$, et par suite $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. On conclut que $X - \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}[X]$.

→ Supposons que $X^2 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$ admet $\sqrt[3]{2}$ comme racine, alors $\sqrt[3]{4} + a\sqrt[3]{2} + b = 0$, ce qui donne en multipliant par $\sqrt[3]{2}$, $2 + a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = 0$, et en la combinant avec la première égalité, on obtient $2 - ab + (b - a^2)\sqrt[3]{2} = 0$, donc $b = a^2$ et $a^3 = 2$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

→ On vient de montrer que $\sqrt[3]{2}$ ne peut être racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}_2[X]$, donc $X^3 - 2$ est le polynôme de degré minimal de $\mathbb{Q}[X]$ qui annule $\sqrt[3]{2}$, donc $X^3 - 2$ divise χ_M .

4.b Les racines de $X^3 - 2$ sont $\sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$ où $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$.

La matrice est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, son spectre est réel, mais $j\sqrt[3]{2}$ est une valeur propre de M complexe non réelle.

On conclut que $\sqrt[3]{2}$ ne peut être valeur propre d'une matrice de $S_n(\mathbb{Q})$.

5. Considérons la matrice de $O_n(\mathbb{Q})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice compagnon associée à $X^n - 1$,

alors $\chi_A = X^n - 1$, donc $\lambda = e^{i2\pi/n}$ est valeur propre de A .

$$M = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \in S_n(\mathbb{Q}).$$

Montrons que $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est valeur propre de M .

Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ non nul, tel que $AZ = \lambda Z$, alors ${}^tAZ = A^{-1}Z = \bar{\lambda}Z$, donc $MZ = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)Z$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ est valeur propre de $M \in S_n(\mathbb{Q})$.

Deuxième partie

6. → $P\left(\frac{1}{X}\right) = a_0 + a_1\frac{1}{X} + a_2\frac{1}{X^2} + \dots + a_{d-1}\frac{1}{X^{d-1}} + \frac{1}{X^d}$, donc $Q(X) = 1 + a_{d-1}X + \dots + a_1X^{d-1} + a_0X^d$.

→ $P(X) = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_d)$, donc $P\left(\frac{1}{X}\right) = \left(\frac{1}{X} - \lambda_1\right)\dots\left(\frac{1}{X} - \lambda_d\right)$, donc en multipliant chaque terme du produit par X , on obtient $Q(X) = (1 - \lambda_1X)\dots(1 - \lambda_dX)$.

7. → La décomposition en éléments simples s'écrit $\frac{Q'(X)}{Q(X)} = -\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i X}$.

→ Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1 - \lambda_i x}$ est développable en série entière en 0 de rayon de convergence $R_i = \frac{1}{|\lambda_i|}$, donc f est développable en série entière comme somme finie de fonctions développables en séries entières en 0, de rayon $r \geq \min_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{1}{|\lambda_i|}\right)$.

→ Par développements usuelles pour tout $x \in]-R_i, R_i[$, $\frac{1}{1 - \lambda_i x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^n x^n$ et par combinaison linéaire,

$$\text{pour tout } x \in]-r, r[, f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n+1}\right) x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} N_{n+1} x^n.$$

8. 8.a Le développement précédent exige que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_{n+1} = \frac{f^n(0)}{n!}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$N_n = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Q}$.

$$\rightarrow f(0) \frac{Q'(0)}{Q(0)} = a_{d-1} \in \mathbb{Q}.$$

→ Supposons que pour un certain $k \geq 2$, $f^{(j)}(0) \in \mathbb{Q}$ pour tout $j \in [[0, k-1]]$.

La formule de Leibniz appliquée à l'égalité $f(x)Q(x) = Q'(x)$ s'écrit :

$$Q^{(k+1)}(x) = (f(x)Q(x))^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j f^{(j)}(x)Q^{(k-j)}(x), \text{ donc } f^{(k)}(0) = Q^{(k+1)}(0) - \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j f^{(j)}(0)Q^{(k-j)}(0).$$

Or $Q \in \mathbb{Q}[X]$, donc ses dérivées en 0 sont rationnelles et par hypothèse de récurrence $f(0), f'(0), \dots, f^{(k-1)}(0) \in \mathbb{Q}$, donc $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Q}$ et la récurrence est établie.

$$\text{On conclut que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, N_n = -\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \in \mathbb{Q}.$$

8.b On va faire une récurrence descendante.

$$\rightarrow a_{d-1} = Q'(0) = f(0)Q(0) = -N_1 \in \mathbb{Q}.$$

\(\rightarrow\) Supposons $a_{d-1}, \dots, a_1 \in \mathbb{Q}$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, λ est racine de P , donc $a_0 + a_1\lambda_i + \dots + a_{d-1}\lambda_i^{d-1} + \lambda_i^d = 0$, ce qui donne en sommant des égalités de 1 à d :

$$da_0 + a_1N_1 + \dots + a_{d-1}N_{d-1} + N_d = 0, \text{ donc } a_0 = -\frac{1}{d}(N_d + a_{d-1}N_{d-1} + \dots + a_1N_1) \in \mathbb{Q}.$$

8.c Quitte à changer le degré de P , on peut supposer que les μ_i sont non nuls et posons $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{d-1}X^{d-1} + X^d$ avec dans ce cas $a_0 \neq 0$, ce qui nous permet de conclure par ce qui précède l'équivalence demandée.

9. \(\rightarrow\) Notons pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $N_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i \beta_j)^r$, alors $N_r = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^r \right) \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^r \right)$.

Les quantités $\sum_{i=1}^n \alpha_i^r$ et $\sum_{j=1}^m \beta_j^r$ sont des rationnels grâce à la question 8, donc $N_r \in \mathbb{Q}$.

\(\rightarrow\) Notons maintenant pour $r \in \mathbb{N}^*$, $N_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j)^r$, alors

$$N_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^r C_r^k \alpha_i^k \beta_j^{r-k} = \sum_{k=0}^r C_r^k \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \right) \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{r-k} \right).$$

Or les quantités $\sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ et $\sum_{j=1}^m \beta_j^{r-k}$ sont des rationnels, donc $N_r \in \mathbb{Q}$ comme somme finie de rationnels.

Troisième partie

10. La matrice M est à coefficients rationnels, donc χ_M est à coefficients rationnels.

M étant symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, les valeurs propres sont des réels. On conclut que les valeurs propres sont totalement réelles.

11. 11.a \(\rightarrow\) $X - 1$ est à coefficients rationnels, dont 1 est racine réelle, donc 1 est totalement réel.

\(\rightarrow\) Soit α_1, β_1 deux éléments totalement réels non nuls et A, B à coefficients dans \mathbb{Q} .

Posons $A = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n)$ et $B = (X - \beta_1)(X - \beta_2)\dots(X - \beta_m)$ où les $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, alors

$\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_1 + \beta_1$ sont respectivement des racines de polynômes $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (X - \alpha_i \beta_j)$ et $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (X - \alpha_i - \beta_j)$

qui sont d'après la question 9, à coefficients rationnels et de racines toutes réelles, ce qui assure que $\alpha_1 + \beta_1$ et $\alpha_1\beta_1$ sont totalement réels.

\(\rightarrow\) $-\alpha_1$ est racine de $A(-X)$ qui est à coefficients rationnels de racines réelles, donc $-\alpha_1$ est totalement réel.

\(\rightarrow\) Quitte à changer le degré de B , on peut supposer que les α_i sont tous non nuls, alors d'après la question 6, $\frac{1}{\alpha_1}$ est racines du polynôme $X^n A\left(\frac{1}{X}\right)$ qui est à coefficients rationnels et de racines toutes réelles, donc $\frac{1}{\alpha_1}$ est totalement réel.

On conclut que l'ensemble des nombres totalement réels est un sous-corps de \mathbb{R} .

11.b \(\rightarrow\) Par définition un élément totalement positif est dans \mathbb{R}^+ .

\(\rightarrow\) On prend A et B comme précédemment, alors $\alpha_i + \beta_j \geq 0$ et $\alpha_i \beta_j \geq 0$, ce qui assure la stabilité par addition et multiplication.

\(\rightarrow\) les racines $X^n A\left(\frac{1}{X}\right)$ sont les $\frac{1}{\alpha_i} \geq 0$, ce qui assure la stabilité par inverse.

12. \(\Rightarrow\) Supposons que x est totalement réel non nul, alors il existe $P = (X - x)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_n)$ à coefficients réels est les λ_i sont tous réels.

Considérons $Q(X) = (X - x^2)(X - \lambda_2^2)\dots(X - \lambda_n^2)$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $M_r = (x^2)^r + (\lambda_2^2)^r + \dots + (\lambda_n^2)^r = x^{2r} + \lambda_2^{2r} + \dots + \lambda_n^{2r} = N_{2r}$.

Or $P \in \mathbb{Q}[X]$, donc d'après la question 8.c, $N_{2r} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire $M_r \in \mathbb{Q}$ et par la même question $Q \in \mathbb{Q}[X]$, donc x^2 est totalement positif.

\(\Leftarrow\) Supposons que x^2 est totalement positif, alors il existe $P = (X - x^2)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_n)$ à coefficients rationnels est les λ_i sont des réels positifs.

Le polynôme $Q(X) = P(X^2)$ est à coefficients rationnels de racines $\pm x, \pm\sqrt{\lambda_2}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n}$ qui sont tous réels, donc x est totalement réel.

Quatrième partie

13. 13.a Soit $X \neq 0$.

$$B(X, X) = {}^tX S X = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j t(z^{i+j}) = t \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j z^{i+j} \right) = t \left(\left(\sum_{k=1}^d x_k z^k \right)^2 \right).$$

Posons pour $i \in [[1, d]]$, $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ où $q_i \in \mathbb{N}_+^*$, $p_i \in \mathbb{Z}$ et $m = \text{ppcm}(q_1, \dots, q_n)$ et $\frac{m}{q_i} = a_i \in \mathbb{N}^*$, alors $x_i = \frac{p_i a_i}{m}$, donc

$$B(X, X) = \frac{1}{m^2} t \left(\left(\sum_{k=1}^d p_k a_k z^k \right)^2 \right), \text{ or } \mathcal{R} \text{ est stable par addition et multiplication, donc } \sum_{k=1}^d p_k a_k z^k \in \mathcal{R}$$

et par la question 12, $\left(\sum_{k=1}^d p_k a_k z^k \right)^2$ est totalement positif, de plus $\sum_{k=1}^d p_k a_k z^k = m z \sum_{k=0}^{d-1} x_{k+1} z^k$ et

puisque par minimalité de d , $\sum_{k=0}^{d-1} x_{k+1} z^k \neq 0$, la condition (ii) assure que $t \left(\left(\sum_{k=1}^d p_k a_k z^k \right)^2 \right) > 0$, c'est

à dire $B(X, X) > 0$.

13.b $S \in M_d(\mathbb{Q})$ par définition de t , donc l'endomorphisme canoniquement associé à S est un endomorphisme de \mathbb{Q}^d .

Soit $X \in \mathbb{Q}^d$ dans le noyau de S , alors $B(X, X) = {}^tX S X = {}^tX 0 = 0$, ce qui exige par la question précédente, $X = 0$, donc S est inversible.

14. → La matrice S est clairement symétrique, donc B est bilinéaire symétrique.

→ Soit $X \in \mathbb{R}^d$, par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe $(X_n)_n$ suite de \mathbb{Q}^d tel que $X_n \rightarrow X$, B étant continue, donc $B(X_n, X_n) \rightarrow B(X, X)$, or $B(X_n, X_n) \geq 0$, donc $B(X, X) \geq 0$.

→ Soit $X \in \mathbb{R}^d$ non nul.

S symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, $S = {}^tPDP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres réelles de S .

$S p(S) \subset \mathbb{R}^+$, en effet si X est vecteur propre de λ_i , alors $B(X, X) = \lambda_i {}^tX X$, donc $\lambda_i \geq 0$ et vu que S est inversible, on aura $S p(S) \subset \mathbb{R}_+^*$,

donc pour tout $X \in \mathbb{R}^d$ non nul, $PX \neq 0$ par inversibilité de P , $B(X, X) = {}^tX {}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^d \lambda_i (PX)_i^2 > 0$.

On conclut que B est un produit scalaire sur \mathbb{R} .

15. 15.a On va construire cette base par récurrence en utilisant le procédé de Schmidt à partir de la base canonique de \mathbb{Q}^d qu'on notera $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$.

→ $e_1 = \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}^d$.

→ Supposons e_1, \dots, e_k construits pour un certain $k \in [[1, d-1]]$.

La projection de ε_{k+1} sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est donnée par $p(\varepsilon_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \frac{B(\varepsilon_{k+1}, e_i)}{B(e_i, e_i)} e_i \in \mathbb{Q}^d$.

On prend $e_{k+1} = \varepsilon_{k+1} - p(\varepsilon_{k+1}) \in \mathbb{Q}^d$ et orthogonal à $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$, ce qui achève la récurrence.

15.b Considérons la matrice $M = (B(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq d}$, alors $M = \text{diag}(q_1, \dots, q_d)$ avec $q_i = B(e_i, e_i) \in \mathbb{Q}_+^*$, d'après 13.a.

Considérons P la matrice de passage de (e_1, \dots, e_d) à la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, alors $S = {}^tPMP$.

En effet, soit $X, Y \in \mathbb{Q}^d$, on note X_e, Y_e les matrices de X, Y dans la base (e_1, \dots, e_d) et $X_\varepsilon, Y_\varepsilon$ les matrices de X, Y dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, alors d'une part puisque $X_e = P X_\varepsilon$ et $Y_e = P Y_\varepsilon$, $B(X, Y) = {}^tX_e M Y_e = {}^tX_\varepsilon {}^tP M P Y_\varepsilon$ et d'autre part $B(X, Y) = {}^tX_\varepsilon S Y_\varepsilon$, donc $S = {}^tP M P$.

16. La matrice M est la matrice compagnon associée au polynôme $Z(X)$, donc $\chi_M = Z(X)$.

17. 17.a On doit montrer que ${}^tMS = SM$.

Soit $i, j \in [[1, d]]$.

→ Pour $i \neq d$, $({}^tMS)_{i,j} = {}^t\varepsilon_{i+1} S \varepsilon_j = s_{i+1,j} = t(z^{i+j+1})$.

→ Pour $i = d$, $({}^tMS)_{d,j} = (a_0, \dots, a_{d-1}) S \varepsilon_j = \sum_{k=1}^d a_{k-1} s_{k,j} = \sum_{k=1}^d a_{k-1} t(z^{k+j}) = t \left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{k+j} \right)$.

→ Pour $j \neq d$, $(SM)_{i,j} = (s_{i,1}, \dots, s_{i,d})^t \varepsilon_{j+1} = s_{i,j+1} = t(z^{i+j+1})$.

$$\rightarrow \text{Pour } j = d, (SM)_{i,d} = (s_{i,1}, \dots, s_{i,d})^t (a_0, \dots, a_{d-1}) = \sum_{k=1}^d a_{k-1} s_{i,k} = \sum_{k=1}^d a_{k-1} t(z^{i+k}) = t\left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{i+k}\right).$$

On conclut que :

$$\text{Si } i, j \in [[1, d-1]], ({}^tMS)_{i,j} = t(z^{i+j+1}) = (SM)_{i,j}.$$

$$\text{Si } i = d, j \in [[1, d-1]], ({}^tMS)_{d,j} = t\left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{k+j}\right).$$

$$(SM)_{d,j} = t(z^{d+j+1}), \text{ or } Z(z) = 0, \text{ entraine que } z^d = \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k = \sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{k-1}, \text{ donc}$$

$$(SM)_{d,j} = t\left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{k+j}\right) = ({}^tMS)_{d,j}.$$

$$\text{Si } i \in [[1, d-1]], j = d, (SM)_{i,d} = t\left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{i+k}\right).$$

$$({}^tMS)_{i,d} = t(z^{i+d+1}), \text{ or } z^d = \sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{d-1}, \text{ donc}$$

$$({}^tMS)_{i,d} = t\left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{i+k}\right) = (SM)_{i,d}.$$

$$\text{Si } (i, j) = (d, d), ({}^tMS)_{d,d} = t\left(\sum_{k=1}^d a_{k-1} z^{k+d}\right) = (SM)_{d,d}.$$

On conclut que ${}^tMS = SM$.

17.b Un calcul simple conduit à $RM R^{-1}$ symétrique si, et seulement si, SM est symétrique.

18. D'après la question 3.c, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \dots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux tels que $M_i^2 = q_i I_n$.

On va s'inspirer de la matrice $RM R^{-1}$.

Posons $R' = \text{diag}(M_1, \dots, M_d) \text{diag}(P, \dots, P)$ et $M' = \text{diag}(M, \dots, M)$ des matrices à n blocs, les q_i étant strictement positifs, donc les M_i sont inversibles.

Considérons la matrice $R' M' R'^{-1}$, alors cette matrice est semblable à M' , donc z est valeur propre, puisque $\chi_{M'} = (\chi_M)^n$.

Elle est à coefficients rationnels, car $M_i, P, M \in \mathbb{Q}$.

Reste à montrer qu'elle est symétrique.

En utilisant la question 15.b avec $d = n$ et $q_1 = \dots = q_n$, on aura pour $i \in [[1, d]]$, si on pose

$S_i = {}^t P \text{diag}(q_i, \dots, q_i) P = {}^t P (q_i I_n) P \in S_n(\mathbb{Q})$ et $R_i = M_i P \in M_n(\mathbb{Q})$, alors $R_i M R_i^{-1}$ est symétrique par la question 17.b.

Donc $R' M' R'^{-1} = \text{diag}(R_1 M R_1^{-1}, \dots, R_d M R_d^{-1})$ est symétrique comme une matrice à blocs symétriques.